

MECÂNICA DOS FLUIDOS

Lista Suplementar — Ondas Sonoras

Tópico Complementar · Suplemento de Ondas Sonoras (Partes I e II)

Prof. Marcelo Santos Guimarães

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Graduação em Física · 1º Semestre 2026

Exercícios complementares

Legenda dos níveis:



Nível A — Aplicação direta de definições e equações.



Nível B — Combinação de conceitos, estimativas de ordem de grandeza, situações novas.



Nível C — Problema desafiador (demonstração, fenômeno real, ou conexão teórica).

Constantes úteis. Ar a 20 °C: $c_s = 343$ m/s, $\rho_0 = 1,21$ kg/m³, $P_0 = 1,013 \times 10^5$ Pa, $\gamma_{\text{ar}} = 1,4$. Hélio (monoatômico): $\gamma = 5/3$, $m = 4$ u. Água: $K = 2,2 \times 10^9$ Pa, $\rho = 10^3$ kg/m³. Referências acústicas: $I_{\text{ref}} = 10^{-12}$ W/m², $P_{\text{ref}} = 20$ μPa. $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K, $\hbar = 1,05 \times 10^{-34}$ Js. $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Lista Suplementar — Ondas Sonoras

Tópico complementar (Partes I e II)

Conteúdo: equação de onda acústica, velocidade do som, ondas planas, fontes, Doppler, Mach, não-linearidade, métrica acústica, limite conforme

Nível A — Aplicação Direta

Problema S.1

~30 min

[Velocidade do som em um gás de Van der Waals: correções moleculares] A velocidade do som em um fluido é $c_s = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_S}$. Para gases reais, a equação de estado de Van der Waals introduz correções devido às forças atrativas intermoleculares (parâmetro a) e ao volume excluído das moléculas (parâmetro b):

$$\left(P + a \frac{\rho^2}{M^2}\right) \left(\frac{M}{\rho} - b\right) = RT,$$

onde M é a massa molar do gás, R é a constante universal dos gases e T é a temperatura.

- (a) Para um processo adiabático reversível ($dS = 0$), a primeira lei da termodinâmica $dE_m + P dv = 0$ (onde $v = M/\rho$ é o volume molar e $E_m(T, v) = C_{V,m}T - a/v$ é a energia interna molar) dita que o gás obedece à relação $T(v - b)^{\gamma-1} = \text{const}$, onde $\gamma - 1 = R/C_{V,m}$. Mostre que a equação de estado adiabática pode ser escrita como:

$$\left(P + \frac{a\rho^2}{M^2}\right) \left(\frac{M}{\rho} - b\right)^\gamma = \text{const}.$$

- (b) Mostre que a velocidade do som $c_s = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_S}$ para o gás de Van der Waals é dada por:

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{P + a\rho^2/M^2}{\rho(1 - b\rho/M)} - \frac{2a\rho}{M^2}}.$$

- (c) Fazendo a expansão em primeira ordem nos pequenos parâmetros adimensionais de Van der Waals, $x = a\rho^2/(M^2P) \ll 1$ (atração fraca) e $y = b\rho/M \ll 1$ (densidade moderada), mostre que:

$$c_s \approx c_0 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{b\rho}{M} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{a\rho^2}{M^2P} \right],$$

onde $c_0 = \sqrt{\gamma P / \rho}$ é a velocidade no gás ideal correspondente.

- (d) Interprete fisicamente os sinais dos termos corretivos. Por que o volume excluído b aumenta a velocidade do som, enquanto a atração intermolecular a a diminui (para gases mono e diatômicos, onde $\gamma < 2$)?

Ref.: Suplemento, Parte I, §1.4–1.6 (Resultados I.1, I.2)

Problema S.2

~35 min

[Atenuação acústica por viscosidade e a física do ultrassom] Ondas sonoras in fluidos reais sofrem dissipação devido à viscosidade do meio. Em uma dimensão, a equação de Navier-Stokes para um fluido compressível com viscosidade de cisalhamento μ e viscosidade de volume η é:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu_{\text{eff}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde $\nu_{\text{eff}} = \eta + \frac{4}{3}\mu$ é o coeficiente de viscosidade efetivo.

- (a) Linearizando esta equação e a equação da continuidade $\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0$ em torno do estado de repouso ($\rho_0, P_0, u_0 = 0$), e assumindo a relação linear de pressão $\tilde{P} = c_s^2 \tilde{\rho}$, mostre que a perturbação de pressão $\tilde{P}$ satisfaz a equação de onda amortecida:

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial x^2} - \frac{\nu_{\text{eff}}}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} \right) = 0.$$

- (b) Assumindo uma solução de onda harmônica da forma $\tilde{P}(x, t) = P_{\text{amp}} e^{-\alpha x} e^{i(kx - \omega t)}$ com frequência real ω e amortecimento fraco ($\alpha \ll k$), substitua-a na equação de onda e mostre que:

$$k \approx \frac{\omega}{c_s}, \quad \alpha \approx \frac{\nu_{\text{eff}} \omega^2}{2\rho_0 c_s^3}.$$

- (c) Para a água a 20 °C, temos $\rho_0 = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $c_s = 1480 \text{ m/s}$, $\mu = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ e $\eta = 3 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Calcule a distância de atenuação $L = 1/\alpha$ (onde a amplitude cai por um fator 1/e) para:

- (i) Som audível de frequência $f = 1 \text{ kHz}$.
- (ii) Ultrassom médico de frequência $f = 1 \text{ MHz}$.

Comente sobre a limitação física que a atenuação impõe à escolha de frequência no diagnóstico por imagem (ultrassonografia).

Ref.: Suplemento, Parte I, §1.7–1.8 (impedância, intensidade)

Nível B — Combinação de Conceitos

Problema S.3

~35 min

[Doppler acústico sob vento e o cone de Mach sob vento lateral] O efeito Doppler clássico assume que o meio (ar) está em repouso. Consideremos o efeito de um vento constante com velocidade w soprando ao longo da linha de propagação do som.

- (a) Uma fonte emite frentes de onda com frequência f_0 . O vento sopra com velocidade w na direção da propagação (da fonte para o observador). A fonte move-se a velocidade v_{fonte} e o observador a v_{obs} (ambos em relação ao solo e na direção do vento). Mostre, por contagem do tempo de chegada de frentes de onda sucessivas, que a frequência observada é:

$$f_{\text{obs}} = f_0 \frac{c_s + w - v_{\text{obs}}}{c_s + w - v_{\text{fonte}}}.$$

- (b) A partir deste resultado, prove que se a fonte e o observador estiverem ambos estacionários em relação ao solo ($v_{\text{fonte}} = v_{\text{obs}} = 0$), o vento não altera a frequência ouvida ($f_{\text{obs}} = f_0$). Explique a física por trás deste cancelamento.
- (c) Considere agora uma fonte supersônica movendo-se a velocidade $v > c_s$ na direção x sob um vento lateral constante com velocidade $w < c_s$ na direção y . As frentes de onda são esferas cujo centro é arrastado pelo vento a partir do ponto de emissão. Mostre que o envelope das frentes (o cone de Mach) é composto por duas retas que passam pela posição atual da fonte e que a normal unitária $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$ a cada uma dessas retas (onde θ é o ângulo que a normal faz com a direção x) satisfaz:

$$v \cos \theta - w \sin \theta = \pm c_s.$$

- (d) Escrevendo $v = \sqrt{v^2 + w^2} \cos \phi$ e $w = \sqrt{v^2 + w^2} \sin \phi$, onde ϕ é a direção do vento relativo à trajetória, determine a inclinação do cone de Mach e interprete o resultado geometricamente.

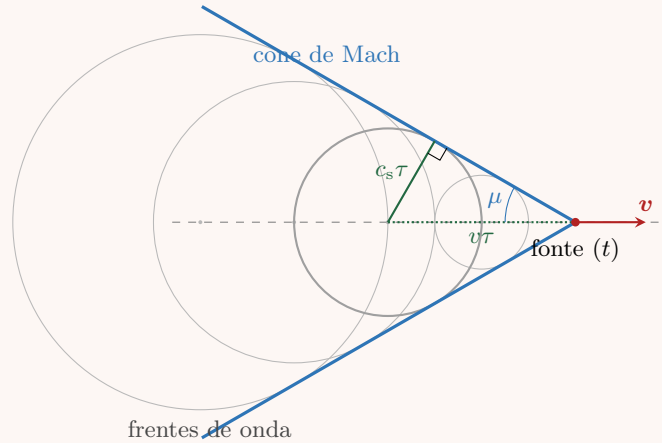


Figura S.3 — Construção do cone de Mach clássico (sem vento). As frentes esféricas emitidas pela fonte supersônica ($v > c_s$) envelopam um cone de semiângulo μ . Do triângulo retângulo (raio da frente $c_s\tau$, avanço da fonte $v\tau$): $\sin \mu = c_s\tau/(v\tau) = c_s/v = 1/\text{Ma}$. O vento lateral adiciona uma translação vertical a cada círculo, inclinando o cone.

Ref.: Suplemento, Parte II, §2.2–2.3 (Resultados II.3 e Mach)

Problema S.4

~40 min

[Radiação multipolar de som: alto-falantes e a lei de Lighthill] Fontes de som podem ser classificadas de acordo com a simetria de sua oscilação em monopolos, dipolos ou quadrupolos.

- (a) Um monopolo acústico (como uma esfera pulsante de raio a com oscilação radial $\epsilon e^{i\omega t}$, onde $\epsilon \ll a$) irradia potência total dada por $\mathcal{P}_{\text{mono}} = 2\pi\rho_0\omega^4\epsilon^2a^4/c_s$ no limite compacto $ka \ll 1$. Mostre que para manter a mesma potência irradiada a 50 Hz que a 200 Hz, a amplitude de oscilação ϵ deve ser multiplicada por um fator 16.
- (b) Um dipolo acústico é modelado por uma esfera de raio a oscilando rigidamente para frente e para trás ao longo do eixo z com velocidade $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$. No limite compacto ($ka \ll 1$), o campo de pressão no campo distante ($r \gg a$) é dado por:

$$\tilde{P}(r, \theta, t) = -\frac{\omega^2 \rho_0 a^3 U_0}{2c_s r} \cos \theta e^{i(kr - \omega t)}.$$

Mostre que a intensidade média $\langle I \rangle = |\tilde{P}|^2/(2\rho_0 c_s)$ decai como $1/r^2$ e que a potência total irradiada é:

$$\mathcal{P}_{\text{dip}} = \frac{\pi \rho_0 \omega^4 a^6 U_0^2}{6c_s^3}.$$

(Dica: a área diferencial do elemento de casca esférica é $dA = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$, e você pode usar o fato de que $\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 2/3$).

- (c) Um alto-falante sem caixa acústica (*baffle*) funciona essencialmente como um dipolo, pois as ondas emitidas pela frente e por trás do cone têm fases opostas e se cancelam lateralmente. Compare as dependências em frequência $\mathcal{P}_{\text{mono}} \propto \omega^4$ e $\mathcal{P}_{\text{dip}} \propto \omega^6$ e explique por que caixas de som são cruciais para a reprodução de frequências graves.

- (d) Turbulência em jatos livres gera som na forma de quadrupolos acústicos (descoberta de M. Lighthill, 1952). A potência de um quadrupolo acústico compacto escala como $\mathcal{P}_{\text{quad}} \propto \omega^8$. Para um jato de diâmetro D e velocidade média U , a frequência típica das flutuações turbulentas é $\omega \sim U/D$. Mostre por análise dimensional que a potência sonora irradiada pelo jato escala como:

$$\mathcal{P} \propto \frac{\rho_0 U^8 D^2}{c_s^5}.$$

Esta é a famosa lei da oitava potência de Lighthill. Qual é a consequência prática desta lei para a redução de ruído em turbinas de aviões comerciais modernos (turbofans de alto *bypass*)?

Ref.: Suplemento, Parte II, §2.1 (Resultados II.1, II.2)

Nível C — Problema Desafiador

Problema S.5

~60 min

[Som não-linear, choques, a métrica acústica e o limite conforme] Este problema percorre, em uma dimensão, a ponte entre o empinamento não-linear das ondas sonoras, a estrutura causal efetiva (“cones de som”) que funda a gravidade análoga, e a velocidade do som no limite conforme relativístico.

Parte 1 — Invariantes de Riemann e formação do choque.

Considere as equações 1D para um fluido barotrópico $P = P(\rho)$, com $c_s^2(\rho) = dP/d\rho$:

$$\partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u = 0, \quad \partial_t u + u \partial_x u + \frac{c_s^2}{\rho} \partial_x \rho = 0.$$

- Definindo $Q(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} (c_s/\rho') d\rho'$, mostre que $R_{\pm} = u \pm Q$ obedecem $[\partial_t + (u \pm c_s) \partial_x] R_{\pm} = 0$, ou seja, $R_{\pm}$ é constante ao longo das características $dx/dt = u \pm c_s$.
- Para um gás ideal ($P \propto \rho^\gamma$, logo $c_s \propto \rho^{(\gamma-1)/2}$), avalie a integral e mostre que $Q = \frac{2}{\gamma-1} [c_s - c_s(\rho_0)]$, de modo que $R_{\pm} = u \pm \frac{2c_s}{\gamma-1}$.
- Numa *onda simples* ($R_- = \text{const}$), mostre que a velocidade de propagação de um ponto de dado u é $\frac{dx}{dt} = u + c_s = c_0 + \frac{\gamma+1}{2}u$ (com $c_0 = c_s(\rho_0)$). Conclua que as cristas alcançam os vales — a onda *empina*.
- Para o perfil inicial $u(x, 0) = u_m \sin(kx)$ (onda simples, $u_m \ll c_0$), mostre que o choque se forma no instante $t_* = \frac{2}{(\gamma+1)u_mk}$. Calcule t_* e a distância de formação $\approx c_0 t_*$ para o ar com $u_m = 1$ m/s e $\lambda = 1$ m.

Parte 2 — A métrica acústica e o horizonte sônico.

Considere agora pequenas perturbações ϕ_1 do potencial de velocidade ($\mathbf{u} = \nabla \phi$) sobre um escoamento de fundo estacionário, irrotacional e barotrópico, com velocidade $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$, densidade $\rho_0(\mathbf{x})$ e velocidade do som local $c_s(\mathbf{x})$.

- Partindo da Bernoulli linearizada, mostre que a flutuação de densidade é $\rho_1 = -\frac{\rho_0}{c_s^2}(\partial_t + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\phi_1$. Substituindo na continuidade linearizada, argumente que ϕ_1 satisfaz $\partial_\mu(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_1) = 0$ — a equação de um campo escalar sem massa na métrica acústica

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s} \left[- (c_s^2 - v_0^2) dt^2 - 2 \mathbf{v}_0 \cdot d\mathbf{x} dt + d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \right].$$

- Identifique a condição que define um **horizonte sônico** (analise o coeficiente de dt^2). Interprete-o: por que o som não consegue escapar de uma região onde $|\mathbf{v}_0| > c_s$? Qual é o análogo gravitacional?
- (Estimativa) A temperatura Hawking análoga é $k_B T_H = \frac{\hbar}{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial n} (v_{0\perp} - c_s) \right|_{\text{hor}}$. Para um escoamento que cruza c_s ao longo de uma escala L , estime $T_H \sim \hbar c_s / (2\pi k_B L)$. Calcule T_H para (i) um análogo em água, $c_s \approx 1,5 \times 10^3$ m/s e $L \approx 1$ mm, e (ii) um condensado de Bose-Einstein, $c_s \approx 1$ mm/s e $L \approx 1$ μm . Comente por que os experimentos de gravidade análoga usam BECs ultrafrios.

Parte 3 — O limite conforme relativístico.

Em física de altas energias e astrofísica de objetos compactos, lidamos com fluidos relativísticos. O tensor de energia-momento de um fluido perfeito é $T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u^\mu u^\nu / c^2 + P g^{\mu\nu}$, onde ε é a densidade de energia, P é a pressão, c é a velocidade da luz e u^μ é a quadrivelocidade ($u^\mu u_\mu = -c^2$).

- (h) Um fluido com simetria conforme (sem escala de massa intrínseca) é invariante sob transformações de escala, o que implica que o traço de seu tensor de energia-momento deve ser nulo ($T^\mu{}_\mu = 0$). Mostre que isto impõe a equação de estado $\varepsilon = 3P$.
- (i) A velocidade do som relativística é definida por $c_s^2 = c^2 \left(\frac{dP}{d\varepsilon} \right)_S$. Mostre que para o fluido conforme a velocidade do som é exatamente $c_s = c/\sqrt{3} \approx 0,577 c$.
- (j) Discuta brevemente a importância deste limite para o plasma de quarks e glúons primordial e para o interior de estrelas de nêutrons massivas (onde observações recentes de raios-X e ondas gravitacionais desafiam a conjectura de que a velocidade do som obedece ao limite conforme $c_s \leq c/\sqrt{3}$ em altas densidades).

Ref.: Suplemento, Parte II, §2.4–2.5 (Resultados II.4, II.5, II.6); Tong §4.5; Unruh (1981)