

MECÂNICA DOS FLUIDOS

Notas de Aula — Módulo III: Fluidos Viscosos

Aulas 11 a 15

Prof. Marcelo Santos Guimarães

*Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Graduação em Física · 1º Semestre 2026*

Baseado nas notas de aula de David Tong (University of Cambridge)

<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/fluids.html>

Abril 2026

Contents

11 A Equação de Navier-Stokes	3
11.1 Da Equação de Euler à de Navier-Stokes	3
11.2 Viscosidade como Difusão de Momento	4
11.3 Quebra de Reversibilidade Temporal	4
11.4 O Número de Reynolds	4
11.5 Condição de Não Deslizamento (<i>No-Slip</i>)	4
11.6 Conservação de Momento e Dissipação de Energia	5
11.7 Exemplo Trabalhado: Equação da Vorticidade Viscosa	5
12 Soluções Exatas I: Poiseuille e Couette	7
12.1 Escoamento de Couette (Placas Paralelas)	7
12.2 Escoamento de Poiseuille em Canal	8
12.3 Poiseuille em Tubo Circular (Hagen-Poiseuille)	8
12.4 Exemplo Trabalhado: Fluxo Sanguíneo na Aorta	8
13 Soluções Exatas II: Stokes, Lubrificação e Arrasto	10
13.1 As Equações de Stokes	10
13.2 Escoamento de Stokes ao Redor de uma Esfera	10
13.3 Teoria de Lubrificação	11
13.4 O Teorema do Scallop de Purcell	11
14 Camada Limite I: Equações de Prandtl e Solução de Blasius	13
14.1 A Ideia de Prandtl: Separação de Escalas	13
14.2 Equações da Camada Limite de Prandtl	13
14.3 Solução de Blasius para Placa Plana	14
14.4 Arrasto de Atrito sobre a Placa	14
15 Camada Limite II: Separação, Transição e Arrasto	16
15.1 Gradientes de Pressão na Camada Limite	16
15.2 Separação da Camada Limite	16
15.3 Transição Laminar-Turbulenta	17
15.4 Exemplo Trabalhado: Arrasto sobre uma Esfera a Reynolds Moderado	17
15.5 Resumo do Módulo III	18

11 A Equação de Navier-Stokes

Aula 11 — 15/04/2026 (Quarta-feira)

Referência: Tong, Cap. 3, §3.1–3.3

Objetivos de Aprendizagem

1. Deduzir a equação de Navier-Stokes a partir do tensor de tensões Newtoniano.
2. Interpretar o termo viscoso $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ como difusão de momento.
3. Compreender a quebra de reversibilidade temporal pela viscosidade.
4. Definir o número de Reynolds e interpretar os regimes $Re \gg 1$ e $Re \ll 1$.
5. Calcular a taxa de dissipação de energia cinética devida à viscosidade.

Motivação

Ao longo do Módulo II, estudamos fluidos *ideais* — sem atrito interno. Os resultados foram elegantes (Bernoulli, Kelvin, Kutta-Joukowski), mas culminaram num paradoxo embaraçoso: arrasto zero em qualquer corpo imerso (d'Alembert). A realidade é que *todos* os fluidos possuem viscosidade, e esta, por menor que seja, muda qualitativamente a física. Nesta aula, acrescentamos a viscosidade à equação de Euler e obtemos a **equação de Navier-Stokes** — provavelmente a mais importante equação não resolvida da física clássica.

11.1 Da Equação de Euler à de Navier-Stokes

Na Aula 3, vimos que o tensor de tensões de um fluido Newtoniano incompressível é $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$. A equação de movimento $\rho Du_i/Dt = \partial\sigma_{ij}/\partial x_j$ dá:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right).$$

O segundo termo no parêntese se anula por incompressibilidade ($\partial_j u_j = 0$). Resultado:

Resultado 11.1 — Equação de Navier-Stokes

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}} \quad (11.1)$$

ou, dividindo por ρ (constante para fluido incompressível):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mathbf{f}}{\rho} \quad (11.2)$$

onde $\nu = \mu/\rho$ é a **viscosidade cinemática**. Juntamente com $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$: quatro equações para quatro incógnitas ($\mathbf{u}, P$).

Observação (Dedução alternativa por simetria). Podemos chegar ao termo $\mu \nabla^2 \mathbf{u}$ sem recorrer ao tensor de tensões, usando apenas argumentos de simetria, seguindo Tong. A força viscosa deve ser: (i) linear em $\mathbf{u}$ (resposta linear); (ii) envolver derivadas espaciais (invariância galileana: $\mathbf{u}$ constante não gera atrito); (iii) escalar sob paridade ($\mathbf{u} \rightarrow -\mathbf{u}$, cada termo em N-S é ímpar). A vorticidade $\nabla \times \mathbf{u}$ é *par* sob paridade, logo não serve. O termo $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ por incompressibilidade. Resta apenas $\nabla^2 \mathbf{u}$.

11.2 Viscosidade como Difusão de Momento

Se isolarmos $\partial \mathbf{u} / \partial t \sim \nu \nabla^2 \mathbf{u}$ (ignorando os demais termos), obtemos a *equação do calor* para $\mathbf{u}$. Sabemos que a equação do calor descreve difusão: uma perturbação localizada se espalha como $L \sim \sqrt{\nu t}$. Portanto, a viscosidade causa **difusão de momento**: se uma região do fluido se move mais rápido que as vizinhas, a viscosidade transfere momento para as regiões adjacentes, suavizando gradientes de velocidade. Esta é a essência do atrito interno.

11.3 Quebra de Reversibilidade Temporal

A equação de Euler é invariante sob reversão temporal $t \rightarrow -t$, $\mathbf{u} \rightarrow -\mathbf{u}$. O termo viscoso *não* é:

$$\nu \nabla^2 \mathbf{u} \xrightarrow{t \rightarrow -t} -\nu \nabla^2 \mathbf{u}.$$

Logo, a equação de Navier-Stokes possui uma **seta do tempo**: soluções não podem ser revertidas. Isso é a manifestação macroscópica da dissipação de energia — exatamente como o atrito na mecânica clássica.

11.4 O Número de Reynolds

O parâmetro adimensional que governa o comportamento de um escoamento viscoso é:

Número de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \quad (11.3)$$

onde U é a velocidade característica e L a escala de comprimento do escoamento. Re é a razão entre o termo inercial $|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}| \sim U^2/L$ e o termo viscoso $|\nu \nabla^2 \mathbf{u}| \sim \nu U/L^2$.

Dois regimes fundamentais:

- $\text{Re} \gg 1$ (inércia domina): a viscosidade é “pequena” comparada à inércia. O escoamento é aproximadamente descrito pela equação de Euler — *exceto* perto de superfícies, onde a condição de não deslizamento força a existência de uma **camada limite** (Aulas 14–15). Exemplo: avião, $\text{Re} \sim 10^7$.
- $\text{Re} \ll 1$ (viscosidade domina): termos inerciais são desprezíveis. Obtemos o **escoamento de Stokes**, linear e reversível. Exemplo: bactéria nadando, $\text{Re} \sim 10^{-4}$.

Situação	U (m/s)	L (m)	Re
Bactéria nadando	10^{-5}	10^{-6}	10^{-5}
Hemácia em capilar	10^{-3}	10^{-5}	10^{-2}
Peixe nadando	1	0,1	10^5
Carro a 100 km/h	30	4	8×10^6
Avião comercial	250	3	5×10^7

11.5 Condição de Não Deslizamento (*No-Slip*)

Para fluidos viscosos, a condição de contorno numa superfície sólida é:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_{\text{parede}} \quad (\text{na superfície}) \quad (11.4)$$

Tanto a componente normal *quanto* a tangencial se anulam (se a parede está em repouso). Esta é a condição *no-slip*, que substitui a impermeabilidade simples ($\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$) dos fluidos ideais. A equação de Navier-Stokes é de segunda ordem em derivadas espaciais (versus primeira para Euler), admitindo esta condição de contorno adicional.

11.6 Conservação de Momento e Dissipação de Energia

A equação de Navier-Stokes pode ser escrita como conservação de momento:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \Pi_{ij} = \rho u_i u_j + P \delta_{ij} - 2\mu E_{ij}. \quad (11.5)$$

Momento é conservado, mas **energia cinética não**. A taxa de dissipação é:

Resultado 11.2 — Dissipação viscosa

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 dV = -2\mu \int_V E_{ij} E_{ij} dV + \text{termos de superfície} \quad (11.6)$$

A dissipação é proporcional a μ e a $E_{ij} E_{ij} \geq 0$: energia cinética é sempre *perdida*, convertida em calor (energia interna). Consequência: o teorema de Bernoulli **não vale** na presença de viscosidade.

11.7 Exemplo Trabalhado: Equação da Vorticidade Viscosa

Exemplo 11.1. Derive a equação de evolução da vorticidade a partir de Navier-Stokes.

Solução. Tomando $\nabla \times$ de ambos os lados de Navier-Stokes (incompressível, $\mathbf{f}$ conservativa):

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (11.7)$$

Comparada com a equação inviscida ($D\boldsymbol{\omega}/Dt = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$), há um termo adicional $\nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$: **difusão de vorticidade**. Consequências: (i) a circulação de Kelvin *não* é mais conservada; (ii) vorticidade pode ser criada nas fronteiras sólidas (via *no-slip*) e difundir para o interior do fluido. $\square$

Conexão com Física Teórica

A equação de Navier-Stokes é talvez o problema aberto mais célebre da física-matemática. A questão da existência e unicidade de soluções suaves em 3D é um dos sete Problemas do Milênio do Clay Mathematics Institute (com prêmio de US\$1 milhão). A dificuldade reside no termo não linear $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, que pode transferir energia para escalas arbitrariamente pequenas. Em linguagem de teoria de campos, a equação de Navier-Stokes descreve um *ponto fixo* do grupo de renormalização: a simetria de escala (11.1) com $t \rightarrow \lambda^2 t$, $\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}$, $\mathbf{u} \rightarrow \lambda^{-1} \mathbf{u}$ é análoga às transformações de escala em teorias de campo conformes.

Resumo

A equação de Navier-Stokes, $\rho D\mathbf{u}/Dt = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}$, incorpora a viscosidade como difusão de momento ($\nu \nabla^2 \mathbf{u}$). Ela quebra a reversibilidade temporal e dissipa energia cinética. O número de Reynolds $Re = UL/\nu$ determina o regime: $Re \gg 1$ (inercial, camada limite), $Re \ll 1$ (Stokes, viscoso). A condição *no-slip* ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$ na parede) é a condição de contorno fisicamente correta.

Leitura Recomendada

- Tong, Cap. 3, §3.1–3.3 (Navier-Stokes, viscosity, Reynolds number).
- Landau & Lifshitz, *Fluid Mechanics*, §15–17.
- Kundu, Cohen & Dowling, *Fluid Mechanics*, §9.1–9.2.

12 Soluções Exatas I: Poiseuille e Couette

Aula 12 — 20/04/2026 (Segunda-feira)
Referência: Tong, Cap. 3, §3.2.1–3.2.3

Objetivos de Aprendizagem

1. Resolver o escoamento de Couette (placas paralelas, uma em movimento) e calcular a tensão de cisalhamento.
2. Resolver o escoamento de Poiseuille em canal e em tubo circular, obtendo o perfil parabólico.
3. Derivar a lei de Hagen-Poiseuille para a vazão em função do gradiente de pressão.
4. Reconhecer que a condição *no-slip* é a origem da vorticidade nessas soluções.
5. Calcular a dissipação viscosa para esses escoamentos.

Motivação

A equação de Navier-Stokes é não linear e, em geral, intratável analiticamente. Porém, para certas geometrias simples — placas paralelas, tubos — podemos encontrar soluções *exatas*. Estas soluções são muito mais que exercícios acadêmicos: o escoamento de Poiseuille descreve o fluxo sanguíneo em artérias, o petróleo em dutos, e a água nas canalizações. O escoamento de Couette modela a lubrificação de mancais. E ambas revelam como a viscosidade gera vorticidade a partir das condições de contorno.

12.1 Escoamento de Couette (Placas Paralelas)

Duas placas infinitas em $z = 0$ e $z = h$. Placa inferior em repouso; placa superior move-se com velocidade $U\hat{x}$. Sem gradiente de pressão.

Ansatz: $\mathbf{u} = (u(z), 0, 0)$, estacionário. Então $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Navier-Stokes:

$$\mu \frac{d^2 u}{dz^2} = 0. \quad (12.1)$$

Com $u(0) = 0$, $u(h) = U$:

Resultado 12.1 — Escoamento de Couette

$$u(z) = \frac{Uz}{h} \quad (12.2)$$

Perfil *linear*. Vorticidade: $\boldsymbol{\omega} = (0, U/h, 0)$ — constante, gerada pelo *no-slip*.

A tensão de cisalhamento na placa é $\tau = \mu du/dz = \mu U/h$. A força por unidade de área necessária para manter a placa superior em movimento é $F/A = \mu U/h$ — esta é a definição operacional clássica de viscosidade.

A taxa de dissipação por unidade de volume é $2\mu E_{ij}E_{ij} = \mu(U/h)^2$, uniforme no fluido. A potência dissipada por unidade de área é $\mu U^2/h$ — igual ao trabalho feito pela força de arrasto.

12.2 Escoamento de Poiseuille em Canal

Duas placas em $z = \pm h$, ambas em repouso. Gradiente de pressão constante $dP/dx < 0$ aplicado na direção x . Ansatz: $\mathbf{u} = (u(z), 0, 0)$. Navier-Stokes:

$$\mu \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{dP}{dx} = \text{constante} < 0. \quad (12.3)$$

Com $u(\pm h) = 0$:

Resultado 12.2 — Poiseuille em canal (perfil parabólico)

$$u(z) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} (h^2 - z^2) = u_{\max} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \quad (12.4)$$

onde $u_{\max} = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dP}{dx}$ é a velocidade no centro ($z = 0$). O perfil é parabólico.

A velocidade média é $\bar{u} = \frac{2}{3} u_{\max}$. A vorticidade é $\omega_y = -du/dz = z(dP/dx)/\mu$, que muda de sinal ao cruzar o centro: as “camadas” de fluido acima e abaixo do eixo giram em sentidos opostos.

12.3 Poiseuille em Tubo Circular (Hagen-Poiseuille)

Tubo de raio R , gradiente de pressão dP/dx na direção axial. Em coordenadas cilíndricas, $\mathbf{u} = u(r)\hat{\mathbf{x}}$. A equação:

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dP}{dx}. \quad (12.5)$$

Com $u(R) = 0$ e $u(0)$ finito:

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} (R^2 - r^2). \quad (12.6)$$

A vazão volumétrica é:

$$Q = \int_0^R u(r) 2\pi r \, dr = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dP}{dx}. \quad (12.7)$$

Resultado 12.3 — Lei de Hagen-Poiseuille

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\mu L} \quad (12.8)$$

onde ΔP é a queda de pressão ao longo de um tubo de comprimento L . A vazão é proporcional a R^4 : dobrar o raio multiplica a vazão por 16. Esta dependência tem enormes consequências em fisiologia vascular — uma pequena obstrução arterial reduz dramaticamente o fluxo sanguíneo.

12.4 Exemplo Trabalhado: Fluxo Sanguíneo na Aorta

Exemplo 12.1. A aorta humana tem raio $R \approx 1,0$ cm e comprimento $L \approx 40$ cm. A vazão cardíaca típica é $Q \approx 5$ L/min. Viscosidade do sangue: $\mu \approx 3,5 \times 10^{-3}$ Pa · s. Estime a queda de pressão.

Solução. $Q = 5 \text{ L/min} = 8,3 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$, $R = 10^{-2} \text{ m}$, $L = 0,4 \text{ m}$. Pela lei de Hagen-Poiseuille:

$$\Delta P = \frac{8\mu L Q}{\pi R^4} = \frac{8 \times 3,5 \times 10^{-3} \times 0,4 \times 8,3 \times 10^{-5}}{\pi \times 10^{-8}} \approx 30 \text{ Pa} \approx 0,2 \text{ mmHg}.$$

Resultado razoável para a aorta (a queda de pressão total no sistema circulatório é $\sim 100 \text{ mmHg}$, mas a maior parte ocorre nas arteríolas, de raio muito menor). $\square$

Conexão com Física Teórica

As soluções exatas de Poiseuille e Couette são *lineares* (o termo $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ se anula identicamente pelo ansatz). Isso as torna análogas às soluções estáticas em eletrodinâmica. Em teoria de campos, soluções exatas de equações não lineares (sólitons, instantons) são raras e preciosas. Na mecânica dos fluidos, as soluções exatas desempenham papel semelhante: elas servem como estados de referência para análise de estabilidade. O escoamento de Poiseuille se torna instável para $\text{Re} \gtrsim 2300$ (em tubo), marcando a transição para turbulência.

Resumo

Couette: $u(z) = Uz/h$ (perfil linear, placas em movimento relativo). Poiseuille em canal: $u(z) \propto (h^2 - z^2)$ (perfil parabólico, gradiente de pressão). Hagen-Poiseuille em tubo: $Q = \pi R^4 \Delta P / (8\mu L)$, com dependência fortíssima $Q \propto R^4$. Ambos têm vorticidade gerada pelo *no-slip* e dissipação proporcional a μ .

Leitura Recomendada

- Tong, Cap. 3, §3.2.1–3.2.3.
- Landau & Lifshitz, §17.
- Acheson, §7.1–7.2.

13 Soluções Exatas II: Stokes, Lubrificação e Arrasto

Aula 13 — 22/04/2026 (Quarta-feira)

Referência: Tong, Cap. 3, §3.4–3.4.4

Objetivos de Aprendizagem

1. Formular as equações de Stokes como limite $Re \ll 1$ de Navier-Stokes.
2. Resolver o escoamento de Stokes ao redor de uma esfera e derivar a fórmula de arrasto.
3. Identificar as propriedades do regime de Stokes: linearidade, reversibilidade, instantaneidade.
4. Descrever a teoria de lubrificação de Reynolds e suas aplicações.
5. Enunciar o teorema do “scallop” de Purcell para locomoção a baixo Reynolds.

Motivação

No regime de baixo número de Reynolds, onde a viscosidade domina sobre a inércia, a equação de Navier-Stokes se lineariza dramaticamente: obtemos as **equações de Stokes**. Este é o mundo das bactérias, dos espermatozoides, do mel escorrendo, da sedimentação de partículas finas. A física muda qualitativamente: não há turbulência, os movimentos são reversíveis, e o arrasto é proporcional à velocidade (não ao seu quadrado). A fórmula de Stokes para o arrasto sobre uma esfera é um dos resultados mais utilizados em toda a mecânica dos fluidos.

13.1 As Equações de Stokes

Para $Re \ll 1$, desprezamos $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ e $\partial\mathbf{u}/\partial t$ na Navier-Stokes:

Equações de Stokes

$$\nabla P = \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (13.1)$$

Consequências imediatas: $\nabla^2 P = 0$ (pressão é harmônica), $\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ (vorticidade é harmônica), $\nabla^4 \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (velocidade é bi-harmônica).

Propriedades notáveis:

1. **Linearidade:** superposição vale.
2. **Reversibilidade:** se $(\mathbf{u}, P)$ é solução para condição de contorno $\mathbf{u}|_{\partial V}$, então $(-\mathbf{u}, -P)$ é solução para $-\mathbf{u}|_{\partial V}$.
3. **Instantaneidade:** sem derivada temporal, o escoamento “segue” instantaneamente as condições de contorno. Não há memória.

13.2 Escoamento de Stokes ao Redor de uma Esfera

Esfera de raio R em repouso, fluido com velocidade $U\hat{\mathbf{z}}$ no infinito. A solução (que usamos sem demonstrar completa — veja Tong §3.4.1) é obtida via a função de Green de Stokes (*Stokeslet*). O resultado para a velocidade na superfície e a pressão é:

$$P = P_\infty - \frac{3\mu UR \cos \theta}{2r^2}. \quad (13.2)$$

A força total sobre a esfera (integrando pressão + tensão viscosa na superfície):

Resultado 13.1 — Fórmula de Stokes para o arrasto

$$F_{\text{arrasto}} = 6\pi\mu RU \quad (13.3)$$

O arrasto é proporcional a U (não a U^2 !), a μ e a R . Decomposição: $\frac{1}{3}$ vem da pressão (arrasto de forma) e $\frac{2}{3}$ da tensão de cisalhamento na superfície.

A fórmula de Stokes é amplamente utilizada: sedimentação de partículas, determinação da viscosidade (viscosímetro de esfera cadente), e até a medida da carga do elétron (experimento da gota de óleo de Millikan, 1909).

Exemplo 13.1 (Velocidade terminal de uma gota de chuva). Uma gota de chuva esférica de raio $R = 1 \text{ mm}$, $\rho_{\text{água}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$, cai no ar ($\mu_{\text{ar}} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$). No equilíbrio: peso = empuxo + arrasto:

$$\frac{4}{3}\pi R^3(\rho_{\text{água}} - \rho_{\text{ar}})g = 6\pi\mu_{\text{ar}}Rv_t.$$

$$v_t = \frac{2R^2(\rho_{\text{água}} - \rho_{\text{ar}})g}{9\mu_{\text{ar}}} \approx \frac{2 \times 10^{-6} \times 10^3 \times 10}{9 \times 1,8 \times 10^{-5}} \approx 120 \text{ m/s}.$$

$\text{Re} = \rho_{\text{ar}}v_tR/\mu_{\text{ar}} \approx 1,2 \times 60^2/(1,8 \times 10^{-5}) \sim 10^3$ — **Stokes não é válido!** Para gotas de chuva, Re é grande demais. A fórmula funciona para gotículas de nuvem ($R \sim 10 \mu\text{m}$), onde $v_t \sim 1 \text{ cm/s}$ e $\text{Re} \sim 10^{-2}$.

13.3 Teoria de Lubrificação

Quando o fluido está confinado numa região muito fina (espessura $h \ll L$), como entre dois mancais ou nas articulações do corpo humano, as equações de Stokes se simplificam ainda mais. A ideia é que os gradientes na direção perpendicular ao filme ($\partial/\partial z \sim 1/h$) dominam sobre os gradientes na direção do escoamento ($\partial/\partial x \sim 1/L$). Isso leva à **equação de Reynolds para lubrificação**:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (13.4)$$

onde $h(x)$ é a espessura local e U a velocidade da superfície em movimento. A pressão pode se tornar enorme em filmes muito finos, suportando cargas enormes com atrito mínimo.

13.4 O Teorema do Scallop de Purcell

Resultado 13.2 — Teorema do “scallop” (Purcell, 1977)

A baixo Re , um organismo cuja sequência de deformações é *recíproca* (isto é, igual quando vista de trás para frente no tempo) não se desloca. Para nadar, é necessário executar movimentos *não recíprocos*: bactérias usam flagelos helicoidais; espermatozóides, ondas propagantes.

Conexão com Física Teórica

O regime de Stokes tem uma analogia surpreendente com a eletrostática: as equações $\nabla P = \mu \nabla^2 \mathbf{u}$ e $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ são formalmente idênticas a $\mathbf{E} = -\nabla V$, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, com a pressão desempenhando o papel do potencial. O *Stokeslet* ($G_{ij} = \frac{1}{8\pi\mu}(\delta_{ij}/r + x_i x_j/r^3)$) é o análogo da função de Green de Coulomb, mas para um campo *vetorial*. Em matéria condensada, escoamentos de Stokes descrevem o arrasto em suspensões coloidais e a dinâmica de polímeros em solução.

Resumo

Para $Re \ll 1$: equações de Stokes (lineares, reversíveis, sem memória). Arrasto sobre esfera: $F = 6\pi\mu RU$ (Stokes). Lubrificação: pressão enorme em filmes finos. Nadar a baixo Re requer movimentos não recíprocos (teorema do scallop).

Leitura Recomendada

- Tong, Cap. 3, §3.4–3.4.5 (Stokes flow, Hele-Shaw, swimming).
- Landau & Lifshitz, §20.
- Acheson, §7.3–7.4.

14 Camada Limite I: Equações de Prandtl e Solução de Blasius

Aula 14 — 27/04/2026 (Segunda-feira)

Referência: Tong, Cap. 3, §3.5–3.5.2

Objetivos de Aprendizagem

1. Explicar a ideia de Prandtl: separação de escalas L (corpo) e δ (camada limite).
2. Estimar a espessura da camada limite por argumento de difusão: $\delta \sim L/\sqrt{\text{Re}}$.
3. Deduzir as equações da camada limite de Prandtl a partir de N-S por análise de escala.
4. Resolver a equação de Blasius para placa plana e interpretar o perfil de velocidade.
5. Calcular o arrasto de atrito sobre uma placa plana.

Motivação

Como o paradoxo de d'Alembert nos ensinou, não podemos simplesmente “desligar” a viscosidade para $\text{Re} \gg 1$. A resolução de Prandtl (1905) é uma das ideias mais brilhantes da mecânica dos fluidos: para Re grande, a viscosidade é relevante apenas numa camada muito fina — a **camada limite** — colada à superfície do corpo. Fora da camada limite, o escoamento é essencialmente invíscido. Dentro, os gradientes de velocidade são tão intensos que, mesmo com ν pequeno, o termo $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ é comparável aos termos inerciais.

14.1 A Ideia de Prandtl: Separação de Escalas

Considere um escoamento de velocidade U ao redor de um corpo de tamanho L , com $\text{Re} = UL/\nu \gg 1$. A condição *no-slip* impõe $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ na superfície. A velocidade deve variar de 0 (na parede) a $\sim U$ (longe da parede) ao longo de uma distância δ — a espessura da camada limite.

Argumento de difusão: a vorticidade é gerada na parede (pelo *no-slip*) e difunde para o interior com coeficiente ν . O tempo de trânsito do fluido passando pelo corpo é $T \sim L/U$. A vorticidade difunde uma distância:

Resultado 14.1 — Espessura da camada limite

$$\delta \sim \sqrt{\nu T} = \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (14.1)$$

Para um avião ($L = 3$ m, $U = 250$ m/s, $\nu = 1,5 \times 10^{-5}$ m²/s): $\text{Re} \sim 5 \times 10^7$, $\delta \sim 3/\sqrt{5} \times 10^7 \approx 0,4$ mm.

14.2 Equações da Camada Limite de Prandtl

Considere uma placa plana semi-infinita em $y = 0$, $x > 0$, com escoamento uniforme U no infinito. Escrevemos $\mathbf{u} = (u(x, y), v(x, y))$. Dentro da camada limite, as escalas são: $x \sim L$, $y \sim \delta$, $u \sim U$, $v \sim \delta U/L$ (da continuidade).

Análise de escala dos termos de Navier-Stokes (x -componente):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U^2}{L}, \quad v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{U^2}{L}, \quad (14.2)$$

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{\nu U}{L^2} = \frac{U^2}{L} \frac{1}{\text{Re}} \ll \frac{U^2}{L}, \quad \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{\nu U}{\delta^2} = \frac{U^2}{L} \quad (\text{usando } \delta^2 = \nu L/U). \quad (14.3)$$

Logo, $\partial^2 u / \partial x^2$ é desprezível frente a $\partial^2 u / \partial y^2$. A componente y mostra que $\partial P / \partial y \approx 0$: a pressão é constante *através* da camada limite. Resultado:

Resultado 14.2 — Equações de Prandtl

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (14.4)$$

onde $P_e(x)$ é a pressão do escoamento *externo* (invíscido), determinada pela solução de Euler fora da camada limite. As equações de Prandtl são parabólicas em x (“tempo”) e requerem condições: $u(x, 0) = v(x, 0) = 0$ (*no-slip*), $u(x, y \rightarrow \infty) = U_e(x)$.

14.3 Solução de Blasius para Placa Plana

Para placa plana, $P_e = \text{const}$ ($U_e = U$). Introduzimos a variável de similaridade:

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{2\nu x}}, \quad (14.5)$$

e a função de corrente $\psi = \sqrt{2\nu U x} f(\eta)$, de modo que $u = U f'(\eta)$ e $v = \sqrt{\nu U / (2x)} (\eta f' - f)$.

Substituindo em Prandtl:

Resultado 14.3 — Equação de Blasius

$$f''' + f f'' = 0, \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \quad (14.6)$$

EDO de terceira ordem, não linear. Deve ser resolvida numericamente (shooting method). O resultado principal: $f''(0) \approx 0,332$.

O perfil de velocidade é “universal” quando expresso em termos de η : $u/U = f'(\eta)$. A espessura da camada limite (definida como $u = 0,99 U$) ocorre em $\eta \approx 3,5$:

$$\delta_{99} \approx 5,0 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = 5,0 \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad (14.7)$$

onde $\text{Re}_x = Ux/\nu$ é o Reynolds local. A camada cresce como $\sqrt{x}$: parabolicamente ao longo da placa.

14.4 Arrasto de Atrito sobre a Placa

A tensão de cisalhamento na parede é:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu U \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} f''(0) = 0,332 \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu x}}. \quad (14.8)$$

Integrando sobre uma placa de comprimento L (largura unitária):

$$F_{\text{atrito}} = \int_0^L \tau_w \, dx = 0,664 \mu U \sqrt{\frac{UL}{\nu}} = 0,664 \rho U^2 L \text{Re}_L^{-1/2}. \quad (14.9)$$

O coeficiente de arrasto (de atrito) é:

$$C_f = \frac{F_{\text{atrito}}}{\frac{1}{2} \rho U^2 L} = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_L}}. \quad (14.10)$$

Conexão com Física Teórica

A camada limite de Prandtl é o exemplo canônico de uma *perturbação singular*: o limite $\nu \rightarrow 0$ não é uniforme no espaço. Longe da parede, a solução converge para a de Euler; perto da parede, uma análise de escala diferente é necessária (coordenada “esticada” y/δ). Este é o mesmo tipo de fenômeno que aparece em mecânica quântica no método WKB (regiões clássicas vs. pontos de retorno) e na técnica de *matched asymptotic expansions* em física-matemática.

Resumo

Prandtl (1905): para $\text{Re} \gg 1$, viscosidade é importante apenas numa camada de espessura $\delta \sim L/\sqrt{\text{Re}}$ colada à superfície. As equações de Prandtl simplificam N-S dentro da camada. A solução de Blasius para placa plana dá perfil universal em $\eta = y\sqrt{U/(2\nu x)}$, com $\delta \propto \sqrt{x}$ e arrasto $C_f = 1,328/\sqrt{\text{Re}_L}$.

Leitura Recomendada

- Tong, Cap. 3, §3.5–3.5.2.
- Acheson, §8.1–8.3.
- Kundu, Cohen & Dowling, §10.2.

15 Camada Limite II: Separação, Transição e Arrasto

Aula 15 — 29/04/2026 (Quarta-feira)

Referência: Tong, Cap. 3, §3.5.3–3.5.4

Objetivos de Aprendizagem

1. Compreender o efeito de gradientes de pressão (favoráveis e adversos) na camada limite.
2. Explicar o mecanismo de **separação** da camada limite e suas consequências para o arrasto.
3. Distinguir entre arrasto de atrito (viscoso) e arrasto de pressão (forma).
4. Descrever a transição laminar-turbulenta e o conceito de Reynolds crítico.
5. Analisar qualitativamente por que uma camada limite turbulenta resiste melhor à separação.

Motivação

Na aula anterior, resolvemos a camada limite sobre uma placa plana (gradiente de pressão nulo). Na realidade, corpos curvos (esferas, aerofólios, automóveis) impõem gradientes de pressão *variáveis* sobre a camada limite. Quando o gradiente de pressão é *adverso* (pressão crescente na direção do escoamento), o fluido perto da parede, já desacelerado pela viscosidade, pode ser freado a ponto de reverter: a camada limite se **separa** da superfície. As consequências são dramáticas: aumento abrupto do arrasto, perda de sustentação (estol), e formação de esteiras turbulentas.

15.1 Gradientes de Pressão na Camada Limite

Nas equações de Prandtl (14.4), a pressão externa $P_e(x)$ é imposta pelo escoamento invíscido. Pela equação de Bernoulli fora da camada:

$$\frac{dP_e}{dx} = -\rho U_e \frac{dU_e}{dx}. \quad (15.1)$$

Gradiente favorável ($dP_e/dx < 0$, $dU_e/dx > 0$): o escoamento externo *acelera*. O fluido na camada é “empurrado para frente”. O perfil de velocidade permanece saudável, com $\partial u/\partial y|_{\text{parede}} > 0$, e a camada pode até afinhar.

Gradiente adverso ($dP_e/dx > 0$, $dU_e/dx < 0$): o escoamento externo *desacelera*. O gradiente de pressão empurra o fluido perto da parede “para trás”. A tensão de cisalhamento na parede $\tau_w = \mu(\partial u/\partial y)|_{y=0}$ diminui e pode eventualmente se anular.

15.2 Separação da Camada Limite

Ponto de separação

O ponto de separação é onde $\tau_w = 0$, isto é:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \quad (15.2)$$

A jusante deste ponto, o escoamento perto da parede *reverte* ($u < 0$), e a camada limite se desprende da superfície. Forma-se uma região de **recirculação** (esteira) atrás do corpo.

A separação tem consequências profundas:

1. A pressão na parte traseira do corpo não se recupera ao valor frontal (como previa o escoamento potencial simétrico). Resulta uma diferença de pressão líquida: o **arrasto de pressão** (ou arrasto de forma).
2. O arrasto total é $F_{\text{total}} = F_{\text{atrito}} + F_{\text{pressão}}$. Para corpos rombudos (esferas, cilindros), $F_{\text{pressão}} \gg F_{\text{atrito}}$; para corpos aerodinâmicos (aerofólios), F_{atrito} domina — desde que não haja separação massiva.

Resultado 15.1 — Resolução do Paradoxo de d'Alembert

A viscosidade, por menor que seja, gera uma camada limite onde a vorticidade se concentra. Se a camada separa (inevitável para corpos rombudos), a simetria frente-trás da pressão é quebrada, gerando arrasto. A teoria de fluidos ideais falha porque ignora a camada limite e a separação — fenômenos intrinsecamente viscosos.

15.3 Transição Laminar-Turbulenta

A camada limite descrita pela solução de Blasius é *laminar*: o escoamento é suave e ordenado. Porém, acima de um Reynolds crítico, pequenas perturbações crescem exponencialmente (instabilidade de Tollmien-Schlichting) e a camada se torna *turbulenta*.

Para placa plana, a transição ocorre em torno de:

$$\text{Re}_{x,\text{crit}} = \frac{U x_{\text{trans}}}{\nu} \approx 3 \times 10^5 \text{ a } 5 \times 10^5. \quad (15.3)$$

Uma camada limite turbulenta tem:

- Perfil de velocidade mais “cheio” (mais momento perto da parede).
- Maior τ_w (mais arrasto de atrito).
- Maior resistência à separação (o momento extra perto da parede atrasa a reversão).

Consequência contra-intuitiva: uma camada turbulenta pode ter *menor arrasto total* que uma laminar, porque resiste à separação e reduz o arrasto de pressão. É por isso que bolas de golfe têm dimples: eles induzem transição turbulenta, atrasam a separação, e reduzem o arrasto — fazendo a bola voar mais longe.

15.4 Exemplo Trabalhado: Arrasto sobre uma Esfera a Reynolds Moderado

Exemplo 15.1. Considere uma esfera de raio R em escoamento uniforme U . Compare qualitativamente o arrasto nos regimes: (a) $\text{Re} \ll 1$ (Stokes); (b) $\text{Re} \sim 10^3$ – 10^5 (subcrítico); (c) $\text{Re} \sim 5 \times 10^5$ (transição).

Solução.

(a) Stokes: $F = 6\pi\mu RU$. Coeficiente de arrasto $C_D = F/(\frac{1}{2}\rho U^2 \pi R^2) = 24/\text{Re}$.

(b) A camada limite é laminar. Separação ocorre perto do “equador” ($\theta \approx 80^\circ$). Esteira larga, arrasto de pressão dominante. $C_D \approx 0,4$ – $0,5$ (aproximadamente constante nesta faixa — “crise do arrasto” ainda não ocorreu).

(c) Transição para camada turbulenta na superfície. A separação é adiada para $\theta \approx 120^\circ$. Esteira muito mais estreita. C_D cai abruptamente para $\sim 0,1$ — a **crise do arrasto** (*drag crisis*). $\square$

15.5 Resumo do Módulo III

O Módulo III construiu a teoria dos fluidos viscosos. A equação de Navier-Stokes incorpora a viscosidade como difusão de momento. O número de Reynolds classifica os escoamentos em dois grandes regimes. Soluções exatas (Poiseuille, Couette, Stokes) fornecem insight físico e verificação de escala. A camada limite de Prandtl resolve o paradoxo de d'Alembert: a separação gera arrasto, e a transição laminar-turbulenta adiciona uma camada de complexidade que determina o desempenho de aviões, automóveis e bolas de golfe.

Conexão com Física Teórica

A separação da camada limite e a transição para turbulência são exemplos de *bifurcações* em sistemas dinâmicos não lineares. A estabilidade do escoamento de Poiseuille é um problema clássico de estabilidade hidrodinâmica que inspirou a teoria moderna de bifurcação e caos. A abordagem de Prandtl — tratar a camada limite como uma região onde a física muda qualitativamente — é um precursor da ideia de *teoria efetiva* na física moderna: diferentes escalas requerem diferentes descrições. A hierarquia escoamento externo (Euler) + camada limite (Prandtl) + sub-camada viscosa é análoga à hierarquia de escalas em QCD (quarks livres em altas energias, confinamento em baixas).

Leitura Recomendada

- Tong, Cap. 3, §3.5.3–3.5.4.
- Acheson, §8.4.
- Kundu, Cohen & Dowling, §10.3–10.4.