

MECÂNICA DOS FLUIDOS

Notas de Aula — Módulo II: Fluidos Ideais

Aulas 5 a 10

Prof. Marcelo Santos Guimarães

*Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Graduação em Física · 1º Semestre 2026*

Baseado nas notas de aula de David Tong (University of Cambridge)

<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/fluids.html>

Março–Abril 2026

Contents

5	Teorema de Bernoulli e Aplicações	3
5.1	Revisão: Bernoulli em Forma Completa	3
5.2	Aplicação: O Tubo de Pitot	3
5.3	Escoamento ao Redor de uma Esfera e o Paradoxo de d'Alembert	4
5.4	Exemplo Trabalhado: Sifão	4
6	Vorticidade I: Definição e Teoremas Fundamentais	6
6.1	Definição e Interpretação da Vorticidade	6
6.2	A Equação da Vorticidade	7
6.3	O Teorema de Kelvin (Conservação da Circulação)	7
6.4	Os Teoremas de Helmholtz	8
7	Vorticidade II: Dinâmica de Vórtices	10
7.1	O Vórtice Pontual em 2D	10
7.2	O Vórtice de Rankine	10
7.3	Par de Vórtices e Imagens	11
7.4	Estiramento de Vórtices: O Vórtice de Burgers	11
7.5	Helicidade	11
8	Escoamento Potencial I: Fundamentos	13
8.1	Formulação do Problema	13
8.2	Soluções Elementares em 2D	13
8.3	Escoamento ao Redor de um Cilindro	14
8.4	Cilindro com Circulação	14
8.5	Exemplo Trabalhado: Força sobre o Cilindro com Circulação	14
9	Escoamento Potencial II: Funções Complexas e Transformações	16
9.1	Introdução aos Números Complexos Aplicados a Fluidos	16
9.2	O Potencial Complexo	16
9.3	Escoamentos Elementares como Funções de z	17
9.4	Transformações Conformes	17
9.5	A Transformação de Joukowski	17
10	Aerodinâmica: Perfis, Kutta-Joukowski e Sustentação	19
10.1	A Condição de Kutta	19
10.2	O Teorema de Kutta-Joukowski	19
10.3	De Onde Vem a Circulação?	20
10.4	O Efeito Magnus	20
10.5	Exemplo Trabalhado: Sustentação de um Aerofólio	20
10.6	Limites da Teoria Potencial	20

5 Teorema de Bernoulli e Aplicações

Aula 5 — 23/03/2026 (Segunda-feira)

Referência: Tong, Cap. 2, §2.1.3–2.1.4 e §2.3.3

Objetivos de Aprendizagem

1. Aplicar o teorema de Bernoulli a escoamentos com geometria variável e interpretar fisicamente cada termo.
2. Deduzir o princípio de Arquimedes como consequência da pressão hidrostática.
3. Resolver problemas de Venturi, effluxo (Torricelli) e sifão usando Bernoulli e continuidade.
4. Enunciar o paradoxo de d'Alembert e compreender por que o arrasto é zero em fluidos ideais.
5. Calcular escoamentos ao redor de esferas e derivar a pressão na superfície.

Motivação

Na Aula 4, deduzimos a equação de Euler e o teorema de Bernoulli. Agora, exploramos suas consequências físicas. O teorema de Bernoulli — que a grandeza $H = \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + P + \Phi$ é constante ao longo de linhas de corrente estacionárias — é uma das ferramentas mais poderosas da mecânica dos fluidos. Ele explica uma variedade impressionante de fenômenos, de jatos de água a sustentação de aviões (qualitativamente). Mas ele também nos leva a um embaraço histórico: o paradoxo de d'Alembert, que revela os limites da descrição ideal de fluidos.

5.1 Revisão: Bernoulli em Forma Completa

Recordemos o resultado central. Para escoamento estacionário ($\partial\mathbf{u}/\partial t = 0$), incompressível ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), de um fluido ideal, sob força conservativa $\mathbf{f} = -\nabla\Phi$:

$$H = \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + P + \Phi = \text{constante ao longo de cada linha de corrente.} \quad (5.1)$$

Para o caso particular de escoamento *irrotacional* ($\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$), H é constante em *todo* o fluido — não apenas ao longo de cada linha de corrente. Esta é uma simplificação poderosa que exploraremos a fundo nas Aulas 8–10.

5.2 Aplicação: O Tubo de Pitot

Um tubo de Pitot mede a velocidade de um escoamento. Consiste em um tubo aberto apontado contra o escoamento. No ponto de estagnação (onde $|\mathbf{u}| = 0$), Bernoulli dá:

$$\frac{1}{2}\rho U^2 + P_\infty = P_{\text{estag}}, \quad (5.2)$$

onde U é a velocidade do escoamento não perturbado e P_∞ a pressão ambiente. Logo:

$$U = \sqrt{\frac{2(P_{\text{estag}} - P_\infty)}{\rho}}. \quad (5.3)$$

Este é o princípio dos tubos de Pitot usados em aviões para medir a velocidade relativa ao ar.

5.3 Escoamento ao Redor de uma Esfera e o Paradoxo de d'Alembert

Considere um escoamento uniforme $\mathbf{u} = U\hat{\mathbf{z}}$ ao redor de uma esfera sólida de raio R . Buscamos uma solução irrotacional e incompressível. Como $\mathbf{u} = \nabla\phi$ e $\nabla^2\phi = 0$ (Laplace), e o escoamento tem simetria azimutal, a solução geral relevante é:

$$\phi(r, \theta) = \left(Ur + \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (5.4)$$

A condição de contorno $u_r = 0$ em $r = R$ (impermeabilidade) exige $B = R^3U/2$:

$$\phi = U \left(r + \frac{R^3}{2r^2} \right) \cos \theta. \quad (5.5)$$

As componentes da velocidade na superfície ($r = R$) são:

$$u_r|_{r=R} = 0, \quad u_\theta|_{r=R} = -\frac{3}{2}U \sin \theta.$$

A velocidade é máxima no “equador” ($\theta = \pi/2$) onde $|u_\theta| = \frac{3}{2}U$ e nula nos polos ($\theta = 0, \pi$) — os **pontos de estagnação**.

Pela constância de H em todo o fluido (escoamento irrotacional):

$$P(\theta) = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right). \quad (5.6)$$

Resultado 5.1 — Paradoxo de d'Alembert

A pressão na superfície da esfera, Eq. (5.6), depende apenas de $\sin^2 \theta$. Portanto, é simétrica entre a parte frontal ($\pi/2 < \theta \leq \pi$) e a parte traseira ($0 \leq \theta < \pi/2$). A **força de arrasto** (*drag*) sobre a esfera é *zero*:

$$F_{\text{arrasto}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P(\theta) \cos \theta R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 0. \quad (5.7)$$

Resultado descoberto por d'Alembert em 1752. A predição de arrasto nulo é claramente absurda para fluidos reais. A resolução — devida a Prandtl em 1905 — envolve a *camada limite* viscosa (Módulo III).

5.4 Exemplo Trabalhado: Sifão

Exemplo 5.1. Um sifão é um tubo curvado que transfere água de um recipiente mais alto para um mais baixo, passando por cima de uma barreira de altura h_{max} acima da superfície do reservatório superior. Determine a velocidade de saída e a pressão mínima no topo do sifão.

Solução. Sejam: $z = 0$ a superfície do reservatório superior; $z = -d$ a saída (onde d é o desnível); $z = h_{\text{max}}$ o topo do sifão. Aplicando Bernoulli entre superfície e saída (pressão atmosférica em ambos, velocidade na superfície ≈ 0):

$$P_{\text{atm}} + \rho g \cdot 0 = \frac{1}{2}\rho v^2 + P_{\text{atm}} - \rho g d \implies v = \sqrt{2gd}.$$

A velocidade de saída depende apenas do desnível d (Torricelli generalizado).

No topo do sifão, Bernoulli entre superfície e topo (mesma vazão, mesma velocidade v pela continuidade se o tubo tem seção uniforme):

$$P_{\text{atm}} = \frac{1}{2}\rho v^2 + P_{\text{topo}} + \rho g h_{\text{max}} \implies P_{\text{topo}} = P_{\text{atm}} - \rho g(h_{\text{max}} + d).$$

O sifão funciona enquanto $P_{\text{topo}} > 0$, ou seja, $h_{\text{max}} + d < P_{\text{atm}}/(\rho g) \approx 10,3$ m para água. Na prática, cavitação ocorre antes desse limite teórico. $\square$

Conexão com Física Teórica

O paradoxo de d'Alembert é um dos grandes fracassos preditivos da física teórica: por mais de 150 anos, a teoria de fluidos ideais não conseguiu prever o arrasto, um fenômeno completamente óbvio na experiência cotidiana. A resolução por Prandtl em 1905 — mesmo ano dos artigos de Einstein sobre relatividade e efeito fotoelétrico — mostrou que a viscosidade, por menor que seja, é *singular*: ela muda qualitativamente a física perto de superfícies. Este é um exemplo clássico de uma *perturbação singular*, conceito que permeia a física matemática moderna.

Resumo

Bernoulli ($H = \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + P + \Phi = \text{const}$) é a ferramenta central para escoamentos estacionários ideais. Para escoamentos irrotacionais, H é constante em todo o fluido. O escoamento potencial ao redor de uma esfera leva à pressão (5.6), simétrica frente-trás, e portanto arrasto zero (paradoxo de d'Alembert). A resolução virá com a viscosidade (Módulo III).

Leitura Recomendada

- Tong, Cap. 2, §2.1.3–2.1.4 (Archimedes, Bernoulli), §2.3.2–2.3.3 (Sphere, d'Alembert).
- Landau & Lifshitz, *Fluid Mechanics*, §5 (Bernoulli), §10 (Flow past bodies).
- Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*, §1.4 e §4.1–4.4.

6 Vorticidade I: Definição e Teoremas Fundamentais

Aula 6 — 25/03/2026 (Quarta-feira)

Referência: Tong, Cap. 2, §2.2–2.2.2

Objetivos de Aprendizagem

1. Definir vorticidade $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, interpretando-a como rotação local do fluido.
2. Decompor o gradiente de velocidade em taxa de deformação E_{ij} e vorticidade Ω_{ij} .
3. Deduzir a equação de evolução da vorticidade e interpretar o estiramento de vórtices (*vortex stretching*).
4. Demonstrar o teorema de Kelvin (conservação da circulação) e extrair suas consequências.
5. Enunciar os teoremas de Helmholtz sobre tubos de vórtice.

Motivação

Até agora, tratamos o campo de velocidade $\mathbf{u}$ como a variável fundamental. Mas há outra grandeza, derivada de $\mathbf{u}$, que captura um aspecto essencial da física de fluidos: a **vorticidade** $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$. A vorticidade descreve a rotação local do fluido e desempenha papel central na formação de turbilhões, furacões, esteiras de aviões e na gênese do arrasto. Nesta aula e na próxima, desenvolvemos a teoria da vorticidade para fluidos ideais.

6.1 Definição e Interpretação da Vorticidade

Vorticidade

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{u} \quad (6.1)$$

A vorticidade é um campo vetorial pseudovetorial com dimensões $[\text{s}^{-1}]$. As curvas integrais de $\boldsymbol{\omega}$ (tangentes a $\boldsymbol{\omega}$ em cada ponto) são chamadas **linhas de vórtice**.

A vorticidade mede a *rotação local*: se colocarmos uma pequena pá de moinho no fluido, ela girará com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}/2$. Isso pode ser visto decompondo o gradiente de velocidade:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = E_{ij} + \Omega_{ij}, \quad (6.2)$$

onde $E_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ é o tensor de taxa de deformação (simétrico) e

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.3)$$

é o tensor de vorticidade (antissimétrico). A relação com o vetor $\boldsymbol{\omega}$ é $\omega_i = -\epsilon_{ijk}\Omega_{jk}$, ou equivalentemente $\Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_k$.

Observação (Cuidado com a intuição visual). Um escoamento que “gira ao redor de um ponto” pode ter vorticidade *nula*! Considere $\mathbf{u} = f(r)(-y, x, 0)$ em coordenadas cartesianas. A vorticidade é $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r^2 f)$. Para $f = 1/r^2$: $\boldsymbol{\omega} = 0$ em todo $r \neq 0$, apesar do escoamento circular. Vorticidade mede rotação *local* (a pá gira sobre si mesma), não global.

6.2 A Equação da Vorticidade

Partimos da equação de Euler na forma (com força conservativa $\mathbf{f} = -\nabla\Phi$):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi. \quad (6.4)$$

Tomando o rotacional de ambos os lados — e usando $\nabla \times (\nabla \cdot) = \mathbf{0}$ —:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}). \quad (6.5)$$

Expandindo via identidade vetorial $\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{u} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega}$, e usando $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ (identidade) e $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (incompressibilidade):

Resultado 6.1 — Equação da Vorticidade (fluido ideal incompressível)

$$\boxed{\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}} \quad (6.6)$$

O lado esquerdo é a taxa de variação material da vorticidade. O lado direito é o termo de **estiramento e torção de vórtices** (*vortex stretching*).

Interpretação: o termo $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ descreve como os tubos de vórtice são esticados e distorcidos pelo campo de velocidade. Quando um tubo de vórtice é esticado (na direção de $\boldsymbol{\omega}$), a conservação do fluxo de vorticidade exige que a área da seção diminua e a magnitude de $|\boldsymbol{\omega}|$ aumente — exatamente como um patinador que gira mais rápido ao puxar os braços. Mais quantitativamente:

$$\frac{1}{2} \frac{D|\boldsymbol{\omega}|^2}{Dt} = \omega_i \omega_j E_{ij} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{E} \boldsymbol{\omega}, \quad (6.7)$$

onde $\mathbf{E}$ é a matriz de taxa de deformação. A vorticidade cresce quando alinhada com a direção de estiramento de E_{ij} .

Observação (Em duas dimensões). Em 2D, $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{z}}$ e o termo $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ se anula (não há componente z em $\mathbf{u}$). Logo, $D\omega/Dt = 0$: a vorticidade de cada parcela é *conservada*. Isso torna escoamentos 2D consideravelmente mais simples. Em 3D, o estiramento de vórtices é o mecanismo fundamental que gera as estruturas complexas da turbulência.

6.3 O Teorema de Kelvin (Conservação da Circulação)

Circulação

A circulação ao redor de uma curva fechada C é:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S}, \quad (6.8)$$

onde S é qualquer superfície com fronteira $\partial S = C$ (pelo teorema de Stokes).

Teorema 6.1 (Teorema de Kelvin, 1869). *Considere uma curva material fechada $C(t)$ (que se move com o fluido). Se o fluido é ideal, incompressível, e as forças externas são conservativas, então:*

$$\boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = 0} \quad (6.9)$$

A circulação ao redor de qualquer curva material é constante no tempo.

Proof. Temos $\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_{C(t)} \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{u} \cdot \frac{D(d\mathbf{x})}{Dt} \right)$. O primeiro termo: substituindo Euler com $\mathbf{f} = -\nabla\Phi$, obtemos $\oint_C (-\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\Phi) \cdot d\mathbf{x} = 0$ (integral de gradientes em curva fechada). O segundo termo: $D(d\mathbf{x})/Dt = (d\mathbf{x} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, e $\oint \mathbf{u} \cdot (d\mathbf{x} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \oint u_i (\partial u_i / \partial x_j) dx_j = \frac{1}{2} \oint \nabla |\mathbf{u}|^2 \cdot d\mathbf{x} = 0$. Logo, $D\Gamma/Dt = 0$. $\square$

Consequências:

1. Se $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ em algum instante, permanece zero para sempre (escoamento *irrotacional*).
2. Tubos de vórtice não podem “começar” ou “terminar” no interior do fluido — devem se estender até a fronteira ou fechar em anéis.
3. O fluxo de vorticidade através de qualquer seção transversal de um tubo é constante (análogo da lei de Gauss para $\mathbf{B}$ em eletrodinâmica).

6.4 Os Teoremas de Helmholtz

Os resultados acima podem ser organizados nos **teoremas de Helmholtz** sobre tubos de vórtice:

Teoremas de Helmholtz (1858)

Para fluido ideal incompressível sob forças conservativas:

1. A *intensidade* (fluxo de vorticidade) de um tubo de vórtice é constante ao longo do tubo.
2. Linhas de vórtice são *linhas materiais*: elas se movem com o fluido.
3. A intensidade de cada tubo de vórtice é constante no tempo.

Conexão com Física Teórica

Os teoremas de Kelvin e Helmholtz revelam uma profunda analogia entre vorticidade em fluidos e campo magnético em eletrodinâmica: $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ (análogo a $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$), os tubos de vórtice não podem terminar (como linhas de campo magnético), e a lei de Biot-Savart permite recuperar $\mathbf{u}$ a partir de $\boldsymbol{\omega}$ exatamente como $\mathbf{B}$ é recuperado a partir de $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'.$$

Kelvin ficou tão impressionado com a estabilidade dos vórtices que propôs que átomos fossem “nós” de tubos de vórtice no éter. A ideia estava errada, mas prefigurou conceitos modernos de sólitons e simetrias topológicas.

Resumo

A vorticidade $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ mede a rotação local do fluido. Ela evolui segundo $D\boldsymbol{\omega}/Dt = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ (estiramento de vórtices). O teorema de Kelvin garante $D\Gamma/Dt = 0$: a circulação é conservada em fluidos ideais. Os teoremas de Helmholtz estabelecem que tubos de vórtice se movem com o fluido e preservam sua intensidade. Em 2D, vorticidade é individualmente conservada ($D\omega/Dt = 0$).

Leitura Recomendada

- Tong, Cap. 2, §2.2–2.2.2.

- Landau & Lifshitz, *Fluid Mechanics*, §8 (Circulation).
- Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*, §2.1–2.4.

7 Vorticidade II: Dinâmica de Vórtices

Aula 7 — 30/03/2026 (Segunda-feira)

Referência: Tong, Cap. 2, §2.2 (exemplos) e §2.4

Objetivos de Aprendizagem

1. Analisar o vórtice pontual 2D e calcular o campo de velocidade induzido.
2. Estudar a dinâmica de pares de vórtices e sua relevância para esteiras de aviões.
3. Descrever o vórtice de Rankine como modelo de vórtice com núcleo finito.
4. Explicar o estiramento de vorticidade em 3D com o exemplo do vórtice de Burgers.
5. Definir helicidade e reconhecê-la como invariante topológico.

Motivação

Na aula anterior, estabelecemos os princípios gerais da vorticidade. Agora, estudamos *soluções concretas*: vórtices individuais, pares de vórtices, e a interação entre estiramento e vorticidade. Vórtices são as “partículas” da mecânica dos fluidos — estruturas coerentes que se movem, interagem e, em certos limites, se comportam como um sistema hamiltoniano de pontos. A trilha de condensação de um avião, o olho de um furacão, e os redemoinhos na esteira de um navio são todas manifestações de dinâmica de vórtices.

7.1 O Vórtice Pontual em 2D

Considere o campo de velocidade (em coordenadas polares):

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (7.1)$$

Este escoamento é irrotacional ($\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$) para $r > 0$, mas a circulação ao redor de qualquer curva envolvendo a origem é Γ . A vorticidade está concentrada na origem como um delta de Dirac:

$$\boldsymbol{\omega} = \Gamma \delta^2(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{z}}. \quad (7.2)$$

Este é o **vórtice pontual**: a singularidade mais simples da dinâmica de vórtices 2D.

O potencial de velocidade é $\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$ (multivalorado!) e a função de corrente é $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r/r_0)$.

7.2 O Vórtice de Rankine

O vórtice pontual é uma idealização com velocidade divergente na origem. Um modelo mais realista é o **vórtice de Rankine**: rotação rígida no interior de um núcleo de raio a e escoamento irrotacional fora:

$$u_\theta(r) = \begin{cases} \frac{\Gamma r}{2\pi a^2} & \text{se } r \leq a, \\ \frac{\Gamma}{2\pi r} & \text{se } r > a. \end{cases} \quad (7.3)$$

Observação. A vorticidade é $\omega = \Gamma/(\pi a^2)$ (constante) para $r < a$ e zero para $r > a$. A circulação total é Γ , independentemente do raio a do núcleo. No limite $a \rightarrow 0$, recuperamos o vórtice pontual.

7.3 Par de Vórtices e Imagens

Dois vórtices pontuais com circulações Γ_1 e Γ_2 , em posições $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, induzem velocidade um sobre o outro via (7.1). Cada vórtice se move com a velocidade induzida pelo outro. Dois casos importantes:

Par simétrico ($\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma$, separação d): os dois vórtices se movem paralelamente na mesma direção com velocidade $v = \Gamma/(2\pi d)$. Este é o modelo básico para a esteira de vórtices atrás de um avião (*trailing vortices*).

Par co-rotante ($\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$, separação d): os vórtices orbitam ao redor do ponto médio com velocidade angular $\omega = \Gamma/(\pi d^2)$.

7.4 Estiramento de Vórtices: O Vórtice de Burgers

O estiramento de vórtices é o mecanismo central que transfere energia para escalas pequenas em escoamentos turbulentos 3D. Um exemplo analítico elegante é o **vórtice de Burgers** — uma solução *exata* da equação de Navier-Stokes (sim, inclui viscosidade!) que combina estiramento com difusão viscosa.

O campo de velocidade é:

$$\mathbf{u} = \left(-\frac{\alpha x}{2}, -\frac{\alpha y}{2}, \alpha z \right) + f(r, t)(-y, x, 0), \quad (7.4)$$

onde o primeiro termo é um escoamento de deformação axial (estica na direção z , comprime no plano xy) e o segundo é uma rotação. A equação da vorticidade, $D\omega/Dt = 2\alpha\omega + \nu\nabla^2\omega$, admite solução estacionária:

$$\omega(r) = \omega_0 \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{4\nu}\right). \quad (7.5)$$

O núcleo do vórtice tem raio $r_c \sim \sqrt{\nu/\alpha}$: equilíbrio entre estiramento (que concentra vorticidade) e difusão viscosa (que a espalha).

7.5 Helicidade

Helicidade

A helicidade de um escoamento é:

$$\mathcal{H} = \int \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \, d^3x. \quad (7.6)$$

Ela mede o grau de “enlaçamento” (*linking*) e “torção” (*twisting*) dos tubos de vórtice.

Resultado 7.1 — Conservação da Helicidade

Para fluido ideal incompressível, a helicidade é uma quantidade conservada:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0. \quad (7.7)$$

A helicidade é um *invariante topológico*: ela conta o número de vezes que os tubos de vórtice se entrelaçam. Dois tubos de vórtice desenlhados têm $\mathcal{H} = 0$; se um passa pelo interior do outro, $\mathcal{H} = \pm 2\Gamma_1\Gamma_2$.

Conexão com Física Teórica

A helicidade $\mathcal{H} = \int \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} d^3x$ tem um análogo exato em eletrodinâmica: a helicidade magnética $\mathcal{H}_m = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3x$, onde $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, que é conservada em magnetohidrodinâmica ideal. Ambas são exemplos de *invariantes de Chern-Simons* — objetos topológicos que aparecem em teoria de gauge, matéria condensada topológica e teoria de nós. A helicidade impõe restrições à dinâmica: tubos de vórtice entrelaçados não podem ser separados continuamente em fluidos ideais.

Resumo

Vórtices pontuais 2D ($\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\omega} = \Gamma \delta^2(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{z}}$) são as singularidades elementares da dinâmica de vórtices. O vórtice de Rankine é um modelo com núcleo finito. Pares de vórtices se movem paralelamente (contra-rotativos) ou orbitam (co-rotativos). Em 3D, o estiramento de vórtices ($D\boldsymbol{\omega}/Dt = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$) é o mecanismo que amplifica a vorticidade; o vórtice de Burgers é um exemplo exato com equilíbrio estiramento-difusão. A helicidade $\mathcal{H} = \int \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} d^3x$ é um invariante topológico conservado.

Leitura Recomendada

- Tong, Cap. 2, §2.2 (exemplos de vórtices) e §2.4.
- Landau & Lifshitz, *Fluid Mechanics*, §9.
- Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*, §2.5–2.7.

8 Escoamento Potencial I: Fundamentos

Aula 8 — 01/04/2026 (Quarta-feira)

Referência: Tong, Cap. 2, §2.3–2.4.1

Objetivos de Aprendizagem

1. Definir escoamento potencial ($\mathbf{u} = \nabla\phi$) e mostrar que ϕ satisfaz a equação de Laplace.
2. Explorar a linearidade do problema e construir soluções por superposição.
3. Calcular os escoamentos fundamentais: uniforme, fonte/sumidouro, dipolo, vórtice.
4. Resolver o escoamento ao redor de um cilindro por superposição uniforme + dipolo.
5. Adicionar circulação ao cilindro e analisar os pontos de estagnação.

Motivação

O teorema de Kelvin garante que um fluido inicialmente irrotacional permanece irrotacional para sempre (na ausência de viscosidade e forças não conservativas). Para esses escoamentos, $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ implica $\mathbf{u} = \nabla\phi$, e a equação de Euler se reduz à equação de Laplace. Entramos no território familiar da eletrostática — com o bônus da linearidade. Nesta aula, construímos o “vocabulário” de escoamentos potenciais por superposição de soluções elementares.

8.1 Formulação do Problema

Para escoamento irrotacional e incompressível:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \implies \mathbf{u} = \nabla\phi; \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \implies \nabla^2\phi = 0. \quad (8.1)$$

A não linearidade da equação de Euler desaparece! A pressão é recuperada a posteriori via Bernoulli: $P = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho|\nabla\phi|^2 - \Phi$.

Observação (Analogia com eletrostática). A correspondência é direta: $\phi_{\text{fluido}} \leftrightarrow V_{\text{eletrostática}}$, $\mathbf{u} \leftrightarrow -\mathbf{E}$, fonte/sumidouro $\leftrightarrow$ carga pontual. Porém: (i) o significado físico é diferente; (ii) as condições de contorno (impermeabilidade) diferem das eletrostáticas (potencial ou carga fixos); (iii) em 2D, o escoamento potencial de fluidos admite circulação.

8.2 Soluções Elementares em 2D

Trabalhamos em coordenadas polares (r, θ) .

Escoamento uniforme

$$\phi = U(x \cos \alpha + y \sin \alpha) = Ur \cos(\theta - \alpha), \quad \psi = Ur \sin(\theta - \alpha).$$

Fonte/sumidouro (vazão Q)

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta, \quad \mathbf{u} = \frac{Q}{2\pi r} \hat{\mathbf{r}}. \quad (8.2)$$

Vórtice pontual (circulação Γ)

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r, \quad \mathbf{u} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (8.3)$$

Dipolo (intensidade μ , eixo x)

$$\phi = -\frac{\mu \cos \theta}{2\pi r}, \quad \psi = -\frac{\mu \sin \theta}{2\pi r}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mu}{2\pi r^2}(\cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (8.4)$$

O dipolo é o limite de fonte + sumidouro separados por distância $d \rightarrow 0$ com $Qd = \mu$ fixo.

8.3 Escoamento ao Redor de um Cilindro

Superpomos escoamento uniforme + dipolo com $\mu = 2\pi UR^2$:

$$\phi = U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta, \quad \psi = U \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta. \quad (8.5)$$

A linha de corrente $\psi = 0$ corresponde a $r = R$ (superfície do cilindro) e $\theta = 0, \pi$ (eixo). As componentes de velocidade são:

$$u_r = U \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta, \quad u_\theta = -U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (8.6)$$

Na superfície ($r = R$): $u_r = 0$, $u_\theta = -2U \sin \theta$. Velocidade máxima nos “flancos” ($\theta = \pm\pi/2$): $|u_\theta| = 2U$.

8.4 Cilindro com Circulação

Adicionamos o vórtice pontual:

$$\phi = U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = U \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R}. \quad (8.7)$$

Na superfície ($r = R$): $u_\theta = -2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}$. Os pontos de estagnação ($u_\theta = 0$ em $r = R$) ocorrem em:

$$\sin \theta = \frac{\Gamma}{4\pi UR}. \quad (8.8)$$

- Se $|\Gamma| < 4\pi UR$: dois pontos de estagnação na superfície.
- Se $|\Gamma| = 4\pi UR$: um ponto de estagnação (fusão).
- Se $|\Gamma| > 4\pi UR$: ponto de estagnação se desloca para fora do cilindro.

8.5 Exemplo Trabalhado: Força sobre o Cilindro com Circulação

Exemplo 8.1. Calcule a força exercida pelo fluido sobre o cilindro com circulação.

Solução. Bernoulli na superfície ($r = R$), com $|\mathbf{u}|^2 = u_\theta^2 = (2U \sin \theta - \Gamma/(2\pi R))^2$:

$$P(\theta) = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho \left(2U \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2.$$

A força na direção do escoamento (*drag*): $F_\parallel = -\oint P \cos \theta R d\theta$. Todos os termos relevantes ($\sin^2 \theta \cos \theta$, $\sin \theta \cos \theta$, $\cos \theta$) integram a zero sobre $[0, 2\pi]$:

$$\boxed{F_{\text{drag}} = 0} \quad (8.9)$$

D'Alembert novamente.

A força perpendicular (*lift*): $F_{\perp} = - \oint P \sin \theta R d\theta$. O único termo que sobrevive é proporcional a $\sin^2 \theta$:

Resultado 8.1 — Fórmula de Kutta-Joukowski (caso do cilindro)

$$F_{\text{lift}} = -\rho U \Gamma \quad (8.10)$$

por unidade de comprimento do cilindro. Para $\Gamma < 0$: força para cima (*lift*). A força é perpendicular ao escoamento e proporcional à circulação. $\square$

Conexão com Física Teórica

O escoamento potencial resolve $\nabla^2 \phi = 0$, que é a mesma equação da eletrostática. O método das imagens em eletrostática tem análogo direto: um vórtice a distância d de uma parede plana se comporta como se houvesse um vórtice “imagem” do outro lado. As transformações conformes que mapearemos na próxima aula são as mesmas usadas em teoria de cordas para mapear superfícies de Riemann.

Resumo

Escoamento potencial: $\mathbf{u} = \nabla \phi$, $\nabla^2 \phi = 0$ (Laplace). Soluções elementares em 2D: uniforme, fonte, vórtice, dipolo. Cilindro = uniforme + dipolo; cilindro com circulação = + vórtice. Arrasto é zero (d’Alembert), mas sustentação (*lift*) é $F = -\rho U \Gamma$ (Kutta-Joukowski para cilindro).

Leitura Recomendada

- Tong, Cap. 2, §2.3–2.4.1.
- Acheson, §4.1–4.4, Batchelor, §2.9–2.10.

9 Escoamento Potencial II: Funções Complexas e Transformações

Aula 9 — 06/04/2026 (Segunda-feira)

Referência: Tong, Cap. 2, §2.4–2.5

Objetivos de Aprendizagem

1. Definir o potencial complexo $w(z) = \phi + i\psi$ e a velocidade complexa dw/dz .
2. Expressar os escoamentos elementares em termos de funções de $z = x + iy$.
3. Compreender o princípio das transformações conformes para fluidos.
4. Aplicar a transformação de Joukowski para mapear um cilindro em um perfil aerodinâmico.

Motivação

A equação de Laplace em 2D tem uma conexão íntima com funções analíticas de variável complexa. Essa conexão transforma a mecânica dos fluidos 2D numa bela peça de análise complexa: cada função analítica $w(z)$ corresponde a um escoamento potencial. Transformações conformes permitem mapear escoamentos conhecidos (cilindro) em geometrias novas (perfis de asa), abrindo a porta para a aerodinâmica teórica.

9.1 Introdução aos Números Complexos Aplicados a Fluidos

Observação (Nota para a turma — números complexos). Para quem não está familiarizado: um número complexo é $z = x + iy$, onde $i = \sqrt{-1}$. Podemos escrevê-lo na forma polar $z = re^{i\theta}$, com $r = |z|$ e $\theta = \arg(z)$. Uma função $f(z)$ é *analítica* (ou holomorfa) se possui derivada complexa $f'(z)$ em todo ponto do seu domínio. Funções analíticas satisfazem as *equações de Cauchy-Riemann*: se $f = u + iv$, então $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ e $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$. Consequência: tanto u quanto v satisfazem a equação de Laplace.

9.2 O Potencial Complexo

Potencial complexo

Para um escoamento potencial 2D com potencial $\phi(x, y)$ e função de corrente $\psi(x, y)$, definimos:

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (9.1)$$

onde $z = x + iy$. Como ϕ e ψ satisfazem Laplace e estão relacionadas por $u_1 = \partial\phi/\partial x = \partial\psi/\partial y$ e $u_2 = \partial\phi/\partial y = -\partial\psi/\partial x$ (que são as equações de Cauchy-Riemann!), $w(z)$ é uma *função analítica* de z .

A **velocidade complexa** é:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = u_1 - iu_2. \quad (9.2)$$

Note o sinal: $dw/dz = u_1 - iu_2$ (o conjugado complexo da velocidade (u_1, u_2)).

9.3 Escoamentos Elementares como Funções de z

Escoamento	Potencial complexo	Parâmetro
Uniforme (ângulo α)	$w = Ue^{-i\alpha}z$	vel. U , ângulo α
Fonte/sumidouro	$w = \frac{Q}{2\pi} \ln z$	vazão Q
Vórtice pontual	$w = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$	circulação Γ
Dipolo	$w = -\frac{\mu}{2\pi z}$	intensidade μ
Cilindro + circulação	$w = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$	U, R, Γ

A elegância é notável: cada escoamento corresponde a uma função complexa simples.

9.4 Transformações Conformes

Proposição 9.1. Se $w(z)$ descreve um escoamento potencial no plano z , e $z = f(\zeta)$ é um mapeamento conforme (analítico e com $f'(\zeta) \neq 0$), então $w(f(\zeta))$ descreve um escoamento potencial no plano ζ .

Isso funciona porque composição de funções analíticas é analítica. Fisicamente: o mapeamento conforme “distorce” a geometria preservando ângulos (e, portanto, a condição de impermeabilidade).

9.5 A Transformação de Joukowski

A mais célebre transformação conforme na mecânica dos fluidos é:

$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} \quad (9.3)$$

onde c é um parâmetro real. Esta transformação mapeia:

- Um círculo no plano ζ (centrado em $\zeta = 0$, raio $R > c$) em uma *elipse* no plano z .
- Um círculo passando por $\zeta = c$ em um segmento de reta (placa plana).
- Um círculo ligeiramente deslocado do centro e passando por $\zeta = c$ em um **perfil aerodinâmico** (aerofólio de Joukowski) — com bordo de ataque arredondado e bordo de fuga pontiagudo.

Exemplo 9.1 (Placa plana). Tome $R = c$ na transformação de Joukowski. O círculo $|\zeta| = c$ é mapeado no segmento $[-2c, +2c]$ no eixo real do plano z . O escoamento ao redor do círculo (com circulação) no plano ζ se transforma no escoamento ao redor de uma placa plana no plano z — um resultado não trivial que seria difícil de obter diretamente. $\square$

Conexão com Física Teórica

As transformações conformes que usamos para resolver escoamentos 2D são o mesmo ferramental usado em teoria de cordas para mapear *worldsheets* (superfícies de Riemann) e em matéria condensada para estudar transições de fase 2D (teoria de campo conforme). A transformação de Joukowski é um caso particular do mapa de Schwarz-Christoffel. A conexão entre mecânica dos fluidos 2D e análise complexa foi uma das grandes realizações intelectuais do séc. XIX e continua sendo uma das mais belas intersecções entre matemática e física.

Resumo

O potencial complexo $w(z) = \phi + i\psi$ unifica potencial e função de corrente em uma função analítica. A velocidade complexa é $dw/dz = u_1 - iu_2$. Todos os escoamentos elementares têm formas algébricas simples em z . Transformações conformes mapeiam soluções conhecidas em geometrias novas; a transformação de Joukowski $z = \zeta + c^2/\zeta$ mapeia cilindros em perfis aerodinâmicos.

Leitura Recomendada

- Tong, Cap. 2, §2.4–2.5.
- Acheson, §4.5–4.9.
- Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge, 2000, §2.10.

10 Aerodinâmica: Perfis, Kutta-Joukowski e Sustentação

Aula 10 — 13/04/2026 (Segunda-feira)

Referência: Tong, Cap. 2, §2.4.2 e §2.5

Objetivos de Aprendizagem

1. Enunciar a condição de Kutta e justificá-la fisicamente.
2. Demonstrar o teorema de Kutta-Joukowski geral: $L = \rho U \Gamma$ por unidade de envergadura.
3. Compreender a origem física da circulação ao redor de um aerofólio.
4. Explicar qualitativamente o efeito Magnus (bola com spin) e o arrasto induzido.
5. Discutir os limites da teoria potencial e o papel do número de Reynolds.

Motivação

Nas aulas anteriores, vimos que um cilindro com circulação experimenta uma força perpendicular ao escoamento: $F = -\rho U \Gamma$ (Eq. 8.10). Mas de onde vem essa circulação na prática? Um cilindro simétrico num fluido ideal não tem razão para gerar circulação espontaneamente. A situação muda dramaticamente quando passamos para um perfil aerodinâmico com bordo de fuga pontiagudo. Neste caso, a *condição de Kutta* seleciona um valor único de Γ . Esta é a ponte entre a matemática elegante dos escoamentos potenciais e a realidade da sustentação de aviões.

10.1 A Condição de Kutta

Considere o escoamento ao redor de um aerofólio de Joukowski (obtido por transformação conforme de um cilindro). O bordo de fuga é pontiagudo. Para uma circulação Γ genérica, a velocidade divergiria no bordo de fuga — fisicamente inaceitável. A **condição de Kutta** exige que:

Condição de Kutta

O escoamento deve deixar o bordo de fuga suavemente, com velocidade finita. Isso fixa univocamente a circulação Γ .

Na prática, é a *viscosidade* (por menor que seja) que impõe a condição de Kutta: ela impede que o fluido contorne o bordo de fuga abrupto. A teoria potencial sozinha admite qualquer Γ ; a condição de Kutta seleciona a solução fisicamente realizável.

Para um aerofólio fino com corda c e ângulo de ataque α num escoamento de velocidade U , a condição de Kutta dá:

$$\Gamma = -\pi c U \sin \alpha \approx -\pi c U \alpha \quad (\text{para } \alpha \text{ pequeno}). \quad (10.1)$$

10.2 O Teorema de Kutta-Joukowski

O resultado mais importante da aerodinâmica teórica clássica é:

Teorema 10.1 (Kutta-Joukowski). *Para qualquer corpo bidimensional imerso num escoamento potencial uniforme de velocidade U , a força de sustentação (lift) por unidade de envergadura é:*

$$L = -\rho U \Gamma \quad (10.2)$$

onde Γ é a circulação total ao redor do corpo. A força é perpendicular ao escoamento. O arrasto é zero (d'Alembert).

A demonstração usa a fórmula de Blasius (integral de contorno da velocidade complexa ao quadrado) e o teorema dos resíduos. Para o aerofólio fino:

$$L = \rho U^2 \pi c \sin \alpha \approx \rho U^2 \pi c \alpha. \quad (10.3)$$

O **coeficiente de sustentação** é $C_L = L/(\frac{1}{2}\rho U^2 c) = 2\pi \sin \alpha \approx 2\pi \alpha$, com gradiente $dC_L/d\alpha = 2\pi$ — resultado clássico da teoria de aerofólio fino.

10.3 De Onde Vem a Circulação?

Esta é uma questão central que merece atenção. A teoria potencial assume Γ como dado. Na realidade, quando um aerofólio começa a se mover, a viscosidade gera um **vórtice de partida** (*starting vortex*) no bordo de fuga. Pelo teorema de Kelvin, a circulação total deve permanecer zero. Logo, a circulação Γ ao redor do aerofólio é *igual e oposta* à do vórtice de partida:

$$\Gamma_{\text{aerofólio}} + \Gamma_{\text{partida}} = 0. \quad (10.4)$$

O vórtice de partida é levado pelo escoamento e fica para trás; o aerofólio carrega a circulação Γ consigo. Este é um dos exemplos mais belos de como a viscosidade, mesmo infinitesimal, tem consequências *qualitativas* na dinâmica.

10.4 O Efeito Magnus

Quando um cilindro (ou esfera) gira num escoamento, a rotação induz circulação pelo atrito viscoso na superfície. Pelo teorema de Kutta-Joukowski, surge uma força perpendicular ao escoamento: a **força de Magnus**. Este é o mecanismo que faz uma bola de futebol com efeito curvar, uma bola de tênis com topspin mergulhar, e uma bola de golfe com backspin subir.

10.5 Exemplo Trabalhado: Sustentação de um Aerofólio

Exemplo 10.1. Um aerofólio de Joukowski com corda $c = 1,5$ m voa a $U = 60$ m/s em ar ($\rho = 1,2$ kg/m³) com ângulo de ataque $\alpha = 5^\circ$. Estime a sustentação por metro de envergadura.

Solução. $\alpha = 5^\circ \approx 0,087$ rad. Pela teoria de aerofólio fino:

$$L = \rho U^2 \pi c \sin \alpha \approx 1,2 \times 60^2 \times \pi \times 1,5 \times 0,087 \approx 1,2 \times 3600 \times 0,41 \approx 1770 \text{ N/m}.$$

Para um avião com envergadura $b = 10$ m: $L_{\text{total}} \approx 17,7$ kN ≈ 1800 kgf. Compatível com um avião leve. $\square$

10.6 Limites da Teoria Potencial

A teoria potencial prevê $C_L = 2\pi\alpha$: sustentação crescente linearmente com α . Na realidade, para ângulos de ataque suficientemente grandes ($\alpha \gtrsim 15^\circ$), ocorre *estol* (*stall*): a camada limite se desprende da superfície superior, a sustentação cai abruptamente, e o arrasto aumenta. Este fenômeno é inteiramente viscoso e não é capturado pela teoria ideal. O número de Reynolds $Re = UL/\nu$ determina a escala da transição.

Conexão com Física Teórica

A sustentação de um aerofólio é frequentemente “explicada” invocando o princípio de Bernoulli: “o ar vai mais rápido em cima da asa, portanto a pressão é menor”. Embora qualitativamente correta, esta explicação é incompleta: ela não diz *por que* o ar vai mais rápido em cima. A explicação correta envolve a circulação gerada pela condição de Kutta. A teoria de Kutta-Joukowski é um triunfo da física-matemática: usando análise complexa, simetria e conservação de circulação, ela captura quantitativamente a sustentação a partir de primeiros princípios. O princípio variacional de Kelvin-Arnold (a equação de Euler como geodésica no grupo de difeomorfismos que preservam volume) fornece a estrutura geométrica subjacente.

Resumo

A condição de Kutta fixa a circulação ao redor de um aerofólio, exigindo velocidade finita no bordo de fuga. O teorema de Kutta-Joukowski, $L = -\rho U \Gamma$, dá a sustentação para *qualquer* perfil 2D. Para aerofólio fino, $C_L \approx 2\pi\alpha$. A circulação é gerada pelo vórtice de partida (viscosidade + Kelvin). O efeito Magnus explica a curva de bolas com spin. A teoria falha para grandes α (estol) — fenômeno viscoso.

Leitura Recomendada

- Tong, Cap. 2, §2.4.2 (Lift and Magnus), §2.5 (Variational Principle).
- Acheson, §4.6–4.9 (Aerodynamics).
- Kundu, Cohen & Dowling, *Fluid Mechanics*, Cap. 14 (Aerodynamics).