

MECÂNICA DOS FLUIDOS

Notas de Aula — Módulo IV: Ondas e Instabilidades

Aulas 16 a 20

Prof. Marcelo Santos Guimarães

*Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Graduação em Física · 1º Semestre 2026*

Baseado nas notas de aula de David Tong (University of Cambridge)

<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/fluids.html>

Maio 2026

Sumário

16 Ondas de Superfície I: Perturbações Lineares	3
16.1 Formulação do Problema	3
16.2 Solução por Modos Normais	4
16.3 Campo de Velocidade	4
16.4 Exemplo Trabalhado: Ondas num Aquário	4
17 Ondas de Superfície II: Dispersão e Grupos de Onda	6
17.1 Limites Assintóticos	6
17.2 Velocidade de Fase e Velocidade de Grupo	6
17.3 Dispersão e Pacotes de Onda	7
17.4 Energia em Ondas de Gravidade	7
17.5 Exemplo Trabalhado: Ondas de Tsunami	7
18 Tensão Superficial, Capilaridade e Ondas Capilares	9
18.1 Tensão Superficial e Equação de Young-Laplace	9
18.2 Ângulo de Contato e Ascensão Capilar	10
18.3 Comprimento Capilar	10
18.4 Relação de Dispersão com Tensão Superficial	11
19 Instabilidades I: Rayleigh-Taylor e Rayleigh-Plateau	13
19.1 O Método de Análise de Estabilidade Linear	13
19.2 Instabilidade de Rayleigh-Taylor	13
19.3 Instabilidade de Rayleigh-Plateau	14
20 Instabilidades II: Kelvin-Helmholtz e Critério de Richardson	16
20.1 A Instabilidade de Kelvin-Helmholtz	16
20.2 O Número de Richardson	17
20.3 Exemplo Trabalhado: Vento Sobre o Mar	17
20.4 Aplicações Geofísicas e Astrofísicas	18

16 Ondas de Superfície I: Perturbações Lineares

Aula 16 — 06/05/2026 (Quarta-feira)

Referência: Tong, Cap. 4, §4.1–4.1.2

Objetivos de Aprendizagem

1. Formular as condições de contorno em superfície livre (cinemática e dinâmica).
2. Linearizar as equações para pequenas perturbações em torno do repouso.
3. Resolver por modos normais e derivar a relação de dispersão $\omega^2 = gk \tanh(kH)$.
4. Interpretar fisicamente a relação de dispersão e identificar a gravidade como força restauradora.

Motivação

Até aqui estudamos fluidos em movimento uniforme ou estacionário. Agora investigamos *perturbações* em torno do repouso — ondas. Ondas em superfícies de fluidos são o fenômeno ondulatório mais familiar: ondas no mar, num lago, numa xícara de café. Como observou Feynman, elas são também o “pior exemplo possível” de ondas para um curso elementar, porque são extraordinariamente ricas: dispersivas, não lineares, com vários regimes (águas profundas, rasas, capilares). Começamos pela análise linear, que já revela toda essa estrutura.

16.1 Formulação do Problema

Considere um fluido incompressível, invíscido, em repouso sob gravidade $\mathbf{g} = -g\hat{z}$. A superfície em repouso está em $z = 0$ e o fundo rígido em $z = -H$. Perturbamos a superfície para $z = \eta(x, t)$, onde $|\eta| \ll H$.

O escoamento perturbado é irrotacional (partiu do repouso, Kelvin garante $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$). Logo $\mathbf{u} = \nabla\phi$ com $\nabla^2\phi = 0$.

Condições de contorno

Três condições:

1. Fundo impermeável:

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0. \quad (16.1)$$

2. Condição cinemática na superfície livre: a superfície é uma fronteira material, $DF/Dt = 0$ com $F = z - \eta(x, t)$. Linearizando:

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial\eta}{\partial t}. \quad (16.2)$$

3. Condição dinâmica (Bernoulli na superfície): a pressão na superfície livre é a pressão atmosférica P_0 . Bernoulli dependente do tempo, linearizado:

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|_{z=0} + g\eta = 0. \quad (16.3)$$

(Absorvemos P_0/ρ numa redefinição de ϕ .)

16.2 Solução por Modos Normais

Buscamos soluções na forma de modos normais (ondas planas):

$$\phi(x, z, t) = \hat{\phi}(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \eta(x, t) = \eta_0 e^{i(kx - \omega t)}. \quad (16.4)$$

A equação de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$ dá $\hat{\phi}'' = k^2 \hat{\phi}$. Solução geral:

$$\hat{\phi}(z) = A \cosh(k(z + H)) + B \sinh(k(z + H)).$$

A condição de fundo (16.1) impõe $B = 0$. Ficamos com $\hat{\phi}(z) = A \cosh(k(z + H))$.

Da condição cinemática (16.2): $Ak \sinh(kH) = -i\omega\eta_0$.

Da condição dinâmica (16.3): $-i\omega A \cosh(kH) = -g\eta_0$.

Dividindo uma pela outra para eliminar A/η_0 :

Resultado 16.1 — Relação de dispersão para ondas de gravidade

$$\omega^2 = gk \tanh(kH) \quad (16.5)$$

A velocidade de fase é:

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kH)}. \quad (16.6)$$

Ondas de diferentes comprimentos viajam a velocidades diferentes: as ondas de gravidade de superfície são **dispersivas**.

16.3 Campo de Velocidade

A solução completa para o potencial é:

$$\phi = \text{Re} \left[-i \frac{\omega\eta_0}{k} \frac{\cosh(k(z + H))}{\sinh(kH)} e^{i(kx - \omega t)} \right]. \quad (16.7)$$

A velocidade tem componentes:

$$u_x = \frac{\omega\eta_0}{\sinh(kH)} \cosh(k(z + H)) \cos(kx - \omega t), \quad (16.8)$$

$$u_z = \frac{\omega\eta_0}{\sinh(kH)} \sinh(k(z + H)) \sin(kx - \omega t). \quad (16.9)$$

As partículas de fluido descrevem trajetórias aproximadamente *elípticas*: em águas profundas, quase circulares perto da superfície (decaindo exponencialmente com a profundidade); em águas rasas, achatadas horizontalmente.

16.4 Exemplo Trabalhado: Ondas num Aquário

Exemplo 16.1. Um aquário tem profundidade $H = 30$ cm. Calcule a velocidade de ondas com comprimento $\lambda = 10$ cm e $\lambda = 2$ m.

Solução.

$\lambda = 10$ cm: $k = 2\pi/\lambda = 62,8 \text{ m}^{-1}$, $kH = 62,8 \times 0,3 = 18,8 \gg 1$ (água profunda).

$$c \approx \sqrt{g/k} = \sqrt{9,8/62,8} = 0,39 \text{ m/s}.$$

$\lambda = 2$ m: $k = 3,14 \text{ m}^{-1}$, $kH = 0,94$ (regime intermediário).

$$c = \sqrt{(g/k) \tanh(kH)} = \sqrt{(9,8/3,14) \times \tanh(0,94)} = \sqrt{3,12 \times 0,74} = 1,52 \text{ m/s}.$$

A onda longa é quase 4 vezes mais rápida que a curta. □

Conexão com Física Teórica

A relação de dispersão $\omega^2 = gk \tanh(kH)$ é análoga à de um campo quântico massivo num espaço com uma dimensão compacta: kH desempenha o papel da razão entre momento e massa. Em águas rasas ($kH \rightarrow 0$), $\omega = c_0 k$ com $c_0 = \sqrt{gH}$ — relação linear, não dispersiva, análoga a fótons (ou fônons acústicos). Em águas profundas ($kH \rightarrow \infty$), $\omega = \sqrt{gk}$ — dispersão “anômala”, com grupo mais lento que fase. A quantização de ondas de superfície leva a quasipartículas chamadas *ripplons*, relevantes em hélio superfluido.

Resumo

A linearização das equações de Euler com superfície livre leva a $\nabla^2 \phi = 0$ com condições cinemática e dinâmica. Modos normais $e^{i(kx - \omega t)}$ dão a relação de dispersão $\omega^2 = gk \tanh(kH)$. As ondas de gravidade são dispersivas: ondas longas viajam mais rápido.

Leitura Recomendada

- Tong, Cap. 4, §4.1–4.1.2.
- Landau & Lifshitz, *Fluid Mechanics*, §12.
- Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*, §3.1–3.3.

17 Ondas de Superfície II: Dispersão e Grupos de Onda

Aula 17 — 11/05/2026 (Segunda-feira)
Referência: Tong, Cap. 4, §4.1.2 (cont.)

Objetivos de Aprendizagem

1. Analisar os limites de águas profundas ($kH \gg 1$) e rasas ($kH \ll 1$).
2. Definir velocidade de fase c e velocidade de grupo c_g , e calcular c_g para ondas de gravidade.
3. Compreender o alargamento de pacotes de onda como consequência da dispersão.
4. Calcular a energia e o fluxo de energia em ondas de gravidade.
5. Demonstrar que a energia é transportada com a velocidade de grupo.

Motivação

Na aula anterior, derivamos a relação de dispersão $\omega^2 = gk \tanh(kH)$. Agora, exploramos suas consequências físicas: os dois regimes assintóticos (águas profundas e rasas), o conceito fundamental de velocidade de grupo, e o transporte de energia por ondas. Estes conceitos aparecem em toda a física — de eletromagnetismo a mecânica quântica — e são universais para qualquer sistema dispersivo.

17.1 Limites Assintóticos

Resultado 17.1 — Dois regimes de ondas de gravidade

	Águas profundas ($kH \gg 1$)	Águas rasas ($kH \ll 1$)
Relação de dispersão	$\omega^2 = gk$	$\omega^2 = gHk^2$
Velocidade de fase	$c = \sqrt{g/k} = \sqrt{g\lambda/2\pi}$	$c = \sqrt{gH}$
Velocidade de grupo	$c_g = \frac{1}{2}c$	$c_g = c = \sqrt{gH}$
Dispersão	Sim (c depende de k)	Não (c independe de k)

Em águas rasas, ondas de qualquer comprimento viajam à mesma velocidade $\sqrt{gH}$: é o regime análogo ao som. Em águas profundas, ondas longas são mais rápidas.

17.2 Velocidade de Fase e Velocidade de Grupo

Velocidade de fase e de grupo

$$c = \frac{\omega}{k} \quad (\text{velocidade de fase}), \quad c_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (\text{velocidade de grupo}). \quad (17.1)$$

A velocidade de fase é a velocidade das cristas individuais. A velocidade de grupo é a velocidade do *envelope* de um pacote de ondas — e é c_g que transporta energia e informação.

Para a relação geral $\omega^2 = gk \tanh(kH)$:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{2} \left(1 + \frac{2kH}{\sinh(2kH)} \right). \quad (17.2)$$

Nos dois limites: $c_g = c/2$ (profundo) e $c_g = c$ (raso).

Observação. Em águas profundas, $c_g = c/2$: as cristas individuais viajam ao dobro da velocidade do envelope. Observando um pacote de ondas, vemos cristas “nascerem” na traseira do pacote, viajarem até a frente, e “morrerem” ali. Este fenômeno é visível observando-se pedras jogadas em lagos.

17.3 Dispersão e Pacotes de Onda

Um pacote de ondas localizado é uma superposição de modos:

$$\eta(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}. \quad (17.3)$$

Se $a(k)$ é concentrado em torno de $\bar{k}$, expandimos $\omega(k) \approx \omega(\bar{k}) + c_g(k - \bar{k})$:

$$\eta(x, t) \approx e^{i(\bar{k}x - \omega(\bar{k})t)} \int \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{i(k - \bar{k})(x - c_g t)}. \quad (17.4)$$

O envelope (integral) se move com velocidade c_g ; a oscilação rápida, com velocidade c .

Se incluímos o termo de segunda ordem na expansão de $\omega(k)$, o pacote se **alarga** com o tempo: $\Delta x \sim \sqrt{|\omega''|}t$. Este é o fenômeno de *dispersão* propriamente dito.

17.4 Energia em Ondas de Gravidade

A energia de uma onda de gravidade tem duas contribuições: cinética (movimento do fluido) e potencial gravitacional (elevação da superfície).

Resultado 17.2 — Energia média por unidade de área

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \rho g \eta_0^2, \quad (17.5)$$

com contribuições iguais de energia cinética e potencial (equipartição). O fluxo médio de energia é:

$$\langle F \rangle = \langle E \rangle c_g. \quad (17.6)$$

A energia é transportada com a velocidade de grupo, não com a velocidade de fase.

17.5 Exemplo Trabalhado: Ondas de Tsunami

Exemplo 17.1. Um tsunami no Pacífico ($H \approx 4$ km) tem comprimento de onda $\lambda \approx 200$ km. Verifique que está no regime de águas rasas e estime a velocidade.

Solução. $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/(2 \times 10^5) \approx 3,1 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$. $kH = 3,1 \times 10^{-5} \times 4 \times 10^3 = 0,13 \ll 1$. Regime de águas rasas.

$$c = \sqrt{gH} = \sqrt{9,8 \times 4000} \approx 200 \text{ m/s} \approx 720 \text{ km/h}.$$

Velocidade comparável à de um avião comercial. A amplitude no oceano aberto é apenas ~ 1 m (quase imperceptível), mas ao chegar à costa, onde H diminui, a conservação de energia faz a amplitude crescer dramaticamente. $\square$

Conexão com Física Teórica

A relação $\langle F \rangle = \langle E \rangle c_g$ é universal para ondas lineares em qualquer sistema dispersivo — de ondas eletromagnéticas a ondas de matéria em mecânica quântica. Na mecânica quântica, a velocidade de grupo de uma onda de de Broglie com $E = \hbar\omega$ e $p = \hbar k$ é $c_g = d\omega/dk = dE/dp = v$: a velocidade clássica da partícula. Em relatividade, $c_g \leq c$ (velocidade da luz) garante causalidade.

Resumo

Águas profundas: $\omega = \sqrt{gk}$, $c_g = c/2$, dispersivo. Águas rasas: $\omega = \sqrt{gH} k$, $c_g = c$, não dispersivo. Pacotes de onda se movem com c_g e se alargam por dispersão. Energia média $\langle E \rangle = \frac{1}{2}\rho g \eta_0^2$ com fluxo $\langle F \rangle = \langle E \rangle c_g$. Tsunamis: águas rasas, $c \approx 200$ m/s.

Leitura Recomendada

- Tong, Cap. 4, §4.1.2 (continuação).
- Landau & Lifshitz, §12.
- Acheson, §3.4–3.5.

18 Tensão Superficial, Capilaridade e Ondas Capilares

Aula 18 — 13/05/2026 (Quarta-feira)

Referência: Tong, Cap. 4, §4.1.3

Objetivos de Aprendizagem

1. Explicar a origem molecular da tensão superficial γ e seus efeitos macroscópicos.
2. Enunciar a equação de Young-Laplace e calcular a sobrepressão em bolhas e gotas.
3. Aplicar a relação de Young para o ângulo de contato e deduzir a ascensão capilar (lei de Jurin).
4. Modificar a condição de contorno dinâmica para incluir tensão superficial.
5. Derivar a relação de dispersão completa (gravidade + tensão superficial).
6. Definir o comprimento capilar ℓ_c e o número de Weber We .

Motivação

Até aqui, desprezamos as forças que atuam na *superfície* do fluido. Porém, a nível molecular, moléculas na superfície têm menos vizinhas que no interior, resultando numa energia por unidade de área — a **tensão superficial** γ . Seus efeitos são dramáticos para gotas pequenas, bolhas, e ondas curtas (“ondulações” na superfície de um café). A tensão superficial modifica a relação de dispersão e introduz um novo regime: as **ondas capilares**.

18.1 Tensão Superficial e Equação de Young-Laplace

Tensão superficial

A tensão superficial γ é a energia por unidade de área da interface, com unidades $[\text{J}/\text{m}^2] = [\text{N}/\text{m}]$. Valores típicos (a 20°C): água/ar $\approx 0,073 \text{ N/m}$; mercúrio/ar $\approx 0,47 \text{ N/m}$; etanol/ar $\approx 0,022 \text{ N/m}$.

Uma superfície curva exerce uma diferença de pressão entre os dois lados:

Resultado 18.1 — Equação de Young-Laplace

$$\Delta P = P_{\text{dentro}} - P_{\text{fora}} = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \gamma \kappa \quad (18.1)$$

onde R_1 e R_2 são os raios de curvatura principais e $\kappa = 1/R_1 + 1/R_2$ é a curvatura média. Para uma esfera de raio R : $\Delta P = 2\gamma/R$. Para um cilindro: $\Delta P = \gamma/R$.

Exemplo 18.1 (Sobrepressão numa bolha de sabão). Uma bolha de sabão de raio $R = 1 \text{ cm}$, $\gamma \approx 0,03 \text{ N/m}$ (filme de sabão). A bolha tem *duas* superfícies (interna e externa), logo $\Delta P = 4\gamma/R = 4 \times 0,03/0,01 = 12 \text{ Pa}$. Pequena comparada à pressão atmosférica ($\sim 10^5 \text{ Pa}$), mas suficiente para manter a forma esférica. $\square$

18.2 Ângulo de Contato e Ascensão Capilar

Quando três fases coexistem — líquido (L), gás (G) e sólido (S), por exemplo água, ar e vidro de um tubo — a linha tríplice onde se encontram não é arbitrária: a configuração de equilíbrio é fixada por um balanço de tensões superficiais. Cada par de fases contribui com uma tensão de superfície (energia por unidade de área da interface entre elas): γ_{LG} , γ_{SG} , γ_{SL} . O equilíbrio das componentes paralelas à parede sólida dá a **relação de Young**:

Resultado 18.2 — Relação de Young para o ângulo de contato

$$\gamma_{SG} = \gamma_{SL} + \gamma_{LG} \cos \theta_c \quad (18.2)$$

onde θ_c é o **ângulo de contato** medido dentro do líquido. Casos extremos: $\theta_c < \pi/2$ caracteriza um líquido que “molha” o sólido (*wetting*); $\theta_c > \pi/2$, um líquido que repele o sólido (*non-wetting*). Água em vidro limpo: $\theta_c \approx 0$ (molhamento perfeito). Mercúrio em vidro: $\theta_c \approx 140^\circ$.

Ascensão capilar: a fórmula de Jurin

A consequência fenomenológica mais conhecida é a *ascensão capilar*. Considere um tubo cilíndrico de raio R mergulhado verticalmente num líquido (densidade ρ , tensão superficial $\gamma = \gamma_{LG}$) que molha o vidro com ângulo θ_c . O menisco no interior do tubo é aproximadamente uma calota esférica de raio de curvatura $R' = R/\cos \theta_c$. Pela equação de Young-Laplace, a pressão imediatamente abaixo do menisco é menor que a pressão atmosférica por $2\gamma \cos \theta_c/R$. Essa depressão é compensada por uma coluna hidrostática de altura h :

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta_c}{\rho g R} \quad (18.3)$$

(**lei de Jurin**, 1718). Note que $h > 0$ (ascensão) se $\theta_c < \pi/2$ (molhamento), e $h < 0$ (depressão) se $\theta_c > \pi/2$ (mercúrio em vidro). Numericamente, para água em vidro com $R = 0,5$ mm: $h \approx 2 \times 0,073 / (10^3 \times 9,8 \times 5 \times 10^{-4}) \approx 3$ cm, em bom acordo com a observação em tubos finos.

Observação. A lei de Jurin é exata para tubos com $R \ll \ell_c$ (onde a forma do menisco é dominada por tensão superficial e bem aproximada por uma calota esférica). Para $R \gtrsim \ell_c$, a forma do menisco é distorcida pela gravidade e a fórmula superestima h . É essa transição que define ℓ_c como escala natural — introduzida formalmente a seguir.

18.3 Comprimento Capilar

A competição entre gravidade e tensão superficial define uma escala de comprimento natural:

Comprimento capilar

$$\ell_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad (18.4)$$

Para escalas $L \ll \ell_c$: tensão superficial domina. Para $L \gg \ell_c$: gravidade domina. Para água: $\ell_c \approx 2,7$ mm.

O **número de Weber** compara inércia e tensão superficial:

$$\text{We} = \frac{\rho U^2 L}{\gamma}. \quad (18.5)$$

$We \gg 1$: inércia domina (jatos, gotas fragmentando). $We \ll 1$: tensão superficial domina (gotas esféricas).

18.4 Relação de Dispersão com Tensão Superficial

A tensão superficial modifica a condição dinâmica na superfície: a pressão logo abaixo é $P = P_0 - \gamma\kappa$. Para ondas 1D com $\eta(x, t)$ pequeno, $\kappa \approx -\partial^2\eta/\partial x^2$. A condição dinâmica linearizada torna-se:

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|_{z=0} + g\eta - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0.$$

Repetindo a análise da Aula 16:

Resultado 18.3 — Relação de dispersão completa

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) \tanh(kH) \quad (18.6)$$

Em águas profundas ($kH \gg 1$):

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho}}. \quad (18.7)$$

A velocidade de fase $c(k)$ tem um **mínimo** em $k = k_c = \sqrt{\rho g/\gamma} = 1/\ell_c$, ou seja, para $\lambda_c = 2\pi\ell_c \approx 1,7$ cm (água). A velocidade mínima é:

$$c_{\min} = \left(\frac{4g\gamma}{\rho} \right)^{1/4} \approx 23 \text{ cm/s} \quad (\text{água}). \quad (18.8)$$

- $\lambda \gg \lambda_c$: **ondas de gravidade** (gravidade domina, $c \sim \sqrt{g/k}$, ondas longas mais rápidas).
- $\lambda \ll \lambda_c$: **ondas capilares** (tensão superficial domina, $c \sim \sqrt{\gamma k/\rho}$, ondas curtas mais rápidas!).

Conexão com Física Teórica

A existência de uma velocidade mínima $c_{\min}$ significa que um objeto movendo-se a $v < c_{\min}$ sobre a superfície da água *não gera ondas* — é o análogo hidrodinâmico da radiação de Cherenkov: uma partícula carregada emite radiação eletromagnética apenas se $v > c/n$ (velocidade da luz no meio). Em superfluidos de hélio, a velocidade crítica de Landau para emissão de fônons desempenha papel análogo.

Resumo

Tensão superficial γ : energia por unidade de área de interface. Young-Laplace: $\Delta P = \gamma\kappa$. Relação de Young fixa o ângulo de contato θ_c ; lei de Jurin $h = 2\gamma \cos \theta_c / (\rho g R)$ para ascensão capilar em tubo fino. Comprimento capilar $\ell_c = \sqrt{\gamma/(\rho g)} \approx 2,7$ mm (água). Relação de dispersão completa: $\omega^2 = (gk + \gamma k^3/\rho) \tanh(kH)$. Ondas de gravidade ($\lambda \gg \lambda_c$) vs. capilares ($\lambda \ll \lambda_c$), com velocidade mínima $c_{\min}$.

Leitura Recomendada

- Tong, Cap. 4, §4.1.3.
- Kundu, Cohen & Dowling, §1.9.
- Acheson, §3.9.

19 Instabilidades I: Rayleigh-Taylor e Rayleigh-Plateau

Aula 19 — 18/05/2026 (Segunda-feira)

Referência: Tong, Cap. 5, §5.1.4 e §5.2

Objetivos de Aprendizagem

1. Compreender o método geral de análise de estabilidade linear.
2. Derivar a instabilidade de Rayleigh-Taylor (fluido pesado sobre leve) e calcular a taxa de crescimento.
3. Derivar a instabilidade de Rayleigh-Plateau (coluna de líquido) e explicar por que jatos se fragmentam em gotas.
4. Identificar os papéis estabilizadores e desestabilizadores de gravidade e tensão superficial.

Motivação

Até agora, estudamos ondas que oscilam — perturbações estáveis. Mas nem todo equilíbrio é estável. Se colocamos um fluido pesado *sobre* um leve (água sobre óleo, virado de cabeça para baixo), a gravidade tenta inverter a configuração: qualquer perturbação cresce exponencialmente. Se um jato de água sai de uma torneira, ele se fragmenta em gotas. Essas são *instabilidades* — e entendê-las é tão importante quanto entender as ondas, pois instabilidades determinam os padrões que emergem na natureza.

19.1 O Método de Análise de Estabilidade Linear

O procedimento é universal:

1. **Encontrar o estado base** (equilíbrio estacionário).
2. **Perturbar**: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'$, $P = P_0 + P'$, $\eta = \eta_0 + \eta'$, com $|\cdot'| \ll |\cdot_0|$.
3. **Linearizar**: manter apenas termos de primeira ordem nas perturbações.
4. **Modos normais**: $\eta' \propto e^{i(kx - \omega t)}$ com ω possivelmente complexa.
5. **Crítério**: se $\text{Im}(\omega) > 0$ para algum k , a perturbação *cresce* exponencialmente $\rightarrow$ **instável**.

19.2 Instabilidade de Rayleigh-Taylor

Considere dois fluidos imiscíveis de densidades ρ_1 (superior) e ρ_2 (inferior), em repouso sob gravidade, com interface plana em $z = 0$. Se $\rho_1 > \rho_2$ (pesado sobre leve), esperamos instabilidade.

A análise segue o mesmo caminho da Aula 16: escoamento potencial em cada fluido, continuidade de pressão na interface, e condição cinemática. O resultado para águas profundas de ambos os lados:

Resultado 19.1 — Relação de dispersão de Rayleigh-Taylor

$$\omega^2 = -\frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 + \rho_2} gk + \frac{\gamma k^3}{\rho_1 + \rho_2} \quad (19.1)$$

onde incluímos tensão superficial γ na interface.

Análise:

Se $\rho_1 < \rho_2$ (leve sobre pesado): $\omega^2 > 0$ para todo $k \rightarrow$ oscilações estáveis (ondas de gravidade na interface, como na Aula 16).

Se $\rho_1 > \rho_2$ (pesado sobre leve) e $\gamma = 0$: $\omega^2 < 0$ para *todo* $k \rightarrow \omega = \pm i\sigma$ com $\sigma > 0$: crescimento exponencial. A taxa de crescimento é:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2) g k}{\rho_1 + \rho_2}}. \quad (19.2)$$

Perturbações de comprimento de onda *curto* (k grande) crescem mais rápido — mas isso é fisicamente irrazoável e indica que um mecanismo estabilizante para k grande falta.

Com $\gamma > 0$: a tensão superficial estabiliza ondas curtas. $\omega^2 < 0$ apenas para $k < k_c$, onde:

$$k_c = \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2) g}{\gamma}} \equiv \frac{1}{\ell_c^{\text{int}}}, \quad \ell_c^{\text{int}} \equiv \sqrt{\frac{\gamma}{(\rho_1 - \rho_2) g}}. \quad (19.3)$$

O *comprimento capilar da interface* ℓ_c^{int} generaliza o $\ell_c = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$ da Aula 18 substituindo a densidade do fluido pela diferença de densidades através da interface — a quantidade fisicamente relevante para a competição entre gravidade e tensão superficial num arranjo Rayleigh-Taylor. A taxa máxima de crescimento ocorre em $k_{\text{max}} = k_c/\sqrt{3}$, e o comprimento de onda mais instável é $\lambda_{\text{max}} = 2\pi\sqrt{3}/k_c$.

Observação. A instabilidade de Rayleigh-Taylor é onipresente: inversão de camadas em estrelas (supernovas), mistura de combustível e oxidante em motores de combustão, confinamento inercial de plasma para fusão nuclear. Em astrofísica, ela é responsável pelas “colunas” visíveis na Nebulosa da Águia.

19.3 Instabilidade de Rayleigh-Plateau

Um cilindro de líquido de raio R (como um jato de água de uma torneira) é instável a perturbações de comprimento de onda suficientemente longo.

Argumento físico: considere uma perturbação que cria regiões mais finas e mais grossas alternadamente. A pressão capilar (Young-Laplace) é maior nas regiões finas (raio menor, curvatura maior) e menor nas grossas. O gradiente de pressão resultante empurra fluido das regiões finas para as grossas, amplificando a perturbação.

Argumento energético: o critério $kR < 1$

A análise dinâmica completa requer escoamento potencial num cilindro e funções de Bessel modificadas (ver Tong §5.2). Aqui apresentamos um argumento termodinâmico simples que captura a essência do critério.

Considere um cilindro de raio R_0 perturbado para

$$R(z, t) = R_0 + \varepsilon \cos(kz), \quad |\varepsilon| \ll R_0.$$

A conservação de volume sob esta perturbação fixa o raio médio: ao se desenvolver $\langle R^2 \rangle = R_0^2 + \varepsilon^2/2$ em segunda ordem, vê-se que o raio do cilindro inalterado deve ser ligeiramente menor, $R_0 \rightarrow R_0(1 - \varepsilon^2/4R_0^2)$, para preservar volume. A área lateral, expandida até segunda ordem em ε , é (cálculo direto a partir de $A = 2\pi \int R \sqrt{1 + (\partial_z R)^2} dz$):

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{\varepsilon^2}{4R_0^2} (k^2 R_0^2 - 1). \quad (19.4)$$

A energia capilar é $E_\gamma = \gamma A$. A perturbação *baixa* a energia (e portanto é favorável) precisamente quando $\Delta A < 0$, isto é, $kR_0 < 1$. Acima dessa fronteira ($kR_0 > 1$), a perturbação aumenta a área e é estabilizada pela tensão superficial. Assim recuperamos o critério sem precisar resolver a dinâmica.

A análise dinâmica completa (Tong §5.2) fornece a taxa de crescimento $\sigma(k)$ em termos da função de Bessel modificada I_1 :

$$\sigma^2 = \frac{\gamma}{\rho R_0^3} (kR_0) (1 - k^2 R_0^2) \frac{I_1'(kR_0)}{I_1(kR_0)}, \quad (19.5)$$

e a maximização numérica dá $kR_0 \approx 0,697$ ($\lambda_{\max} \approx 9,01 R_0$). O argumento energético acima já contém a parte essencial — o fator $(1 - k^2 R_0^2)$, que controla o sinal.

Resultado 19.2 — Instabilidade de Rayleigh-Plateau

O jato é instável para $kR < 1$, ou seja, para perturbações com comprimento de onda:

$$\lambda > 2\pi R \text{ (comprimento da circunferência)} \quad (19.6)$$

A taxa de crescimento máxima ocorre em $kR \approx 0,7$, dando $\lambda_{\max} \approx 9,0 R$. Este é o espaçamento típico entre gotas observado em jatos que se fragmentam.

Exemplo 19.1 (Gotas de uma torneira). Uma torneira produz um jato de raio $R \approx 2$ mm. Esperamos fragmentação em gotas espaçadas por $\lambda_{\max} \approx 9 \times 2 = 18$ mm, com raio de gota r dado pela conservação de volume: $\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi R^2 \lambda_{\max}$, logo $r = (3R^2 \lambda_{\max}/4)^{1/3} \approx (3 \times 4 \times 18/4)^{1/3} \text{ mm} \approx 3,8$ mm. Compatível com a observação. $\square$

Conexão com Física Teórica

A instabilidade de Rayleigh-Plateau é um belo exemplo de competição entre modos: perturbações curtas ($kR > 1$) são estabilizadas pela tensão superficial (aumentariam a área), enquanto perturbações longas ($kR < 1$) reduzem a área total e são favorecidas termodinamicamente. A esfera é a forma de menor área para volume dado (teorema isoperimétrico), e a instabilidade é o mecanismo pelo qual a natureza “prefere” esferas a cilindros. Em teoria de cordas, a instabilidade de Gregory-Laflamme de cordas negras é o análogo gravitacional da instabilidade de Rayleigh-Plateau.

Resumo

Rayleigh-Taylor: fluido pesado sobre leve é instável; taxa $\sigma \sim \sqrt{gk \Delta\rho/\bar{\rho}}$; tensão superficial estabiliza $k > k_c$. Rayleigh-Plateau: jato cilíndrico instável para $\lambda > 2\pi R$; espaçamento de gotas $\approx 9R$. O método geral: linearizar $\rightarrow$ modos normais $\rightarrow \omega^2 < 0$ indica instabilidade.

Leitura Recomendada

- Tong, Cap. 5, §5.1.4 (Rayleigh-Taylor) e §5.2 (Rayleigh-Plateau).
- Acheson, §9.1–9.2.
- Kundu, Cohen & Dowling, §11.1.

20 Instabilidades II: Kelvin-Helmholtz e Critério de Richardson

Aula 20 — 20/05/2026 (Quarta-feira)

Referência: Tong, Cap. 5, §5.1–5.1.3

Objetivos de Aprendizagem

1. Derivar a instabilidade de Kelvin-Helmholtz para uma camada de cisalhamento entre dois fluidos.
2. Compreender o mecanismo físico: amplificação de ondulações pela diferença de velocidade.
3. Analisar os efeitos estabilizadores de gravidade e tensão superficial.
4. Definir o número de Richardson e enunciar o critério de estabilidade.
5. Reconhecer a relevância da instabilidade de K-H em atmosfera, oceano e astrofísica.

Motivação

A instabilidade de Kelvin-Helmholtz (K-H) é talvez a mais ubíqua de todas as instabilidades de fluidos: ela ocorre sempre que dois fluidos (ou duas camadas do mesmo fluido) se movem com velocidades diferentes. O vento soprando sobre o mar gera ondas (pelo menos em parte) pela instabilidade K-H. Nuvens *Kelvin-Helmholtz* — com seu padrão ondulado característico — são uma das demonstrações mais fotogênicas de mecânica dos fluidos. Em astrofísica, K-H opera em jatos relativísticos, ventos estelares, e discos de acreção.

20.1 A Instabilidade de Kelvin-Helmholtz

Considere dois fluidos semi-infinitos separados por uma interface plana em $z = 0$. O fluido superior ($z > 0$) tem densidade ρ_1 e velocidade $U_1 \hat{x}$; o inferior ($z < 0$), ρ_2 e $U_2 \hat{x}$.

Procedendo como nas aulas anteriores (perturbação $\eta = \eta_0 e^{i(kx - \omega t)}$, potencial em cada fluido, continuidade de pressão e condição cinemática), obtemos:

Resultado 20.1 — Relação de dispersão de Kelvin-Helmholtz

$$(\rho_1 + \rho_2)\omega^2 - 2(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)k\omega + (\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2)k^2 = (\rho_2 - \rho_1)gk + \gamma k^3 \quad (20.1)$$

(Incluindo gravidade e tensão superficial, com a convenção g apontando para $z < 0$, fluido 2 abaixo.)

Caso mais simples: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $\gamma = 0$, *sem gravidade*

$U_1 = U$, $U_2 = 0$. A relação de dispersão se simplifica:

$$\omega = \frac{kU}{2} \pm \frac{ikU}{2}. \quad (20.2)$$

O modo com $\text{Im}(\omega) > 0$ cresce como $e^{kUt/2}$: **instável para todo k** . Ondas curtas crescem mais rápido. A taxa de crescimento é $\sigma = kU/2$, proporcional tanto a k quanto a U .

Mecanismo físico: onde a interface se levanta, o fluido superior (mais rápido) precisa percorrer um caminho mais longo, acelerando e reduzindo a pressão (Bernoulli). Essa baixa pressão “puxa” a interface para cima, amplificando a perturbação.

Efeito da gravidade ($\rho_2 > \rho_1$, estratificação estável)

A gravidade é uma força restauradora que se opõe à instabilidade para ondas longas. Há instabilidade apenas se a diferença de velocidade é suficiente para vencer a estabilização gravitacional.

Efeito da tensão superficial

A tensão superficial estabiliza ondas curtas (k grande), exatamente como em Rayleigh-Taylor. A combinação de gravidade + tensão superficial pode estabilizar *todos* os modos para diferença de velocidade suficientemente pequena.

20.2 O Número de Richardson

Para quantificar a competição entre cisalhamento (desestabilizador) e estratificação (estabilizador), define-se:

Número de Richardson

$$\text{Ri} = \frac{-g \frac{d\rho}{dz} / \rho}{\left(\frac{dU}{dz}\right)^2} = \frac{N^2}{(dU/dz)^2} \quad (20.3)$$

onde $N = \sqrt{-(g/\rho) d\rho/dz}$ é a **frequência de Brunt-Väisälä** (frequência natural de oscilação de parcelas deslocadas verticalmente num fluido estratificado).

Resultado 20.2 — Critério de Richardson

Para escoamento cisalhante estratificado de forma contínua:

$$\text{Ri} > \frac{1}{4} \text{ em todo ponto} \implies \text{escoamento estável (condição suficiente)} \quad (20.4)$$

Se $\text{Ri} < 1/4$ em alguma região, o escoamento *pode* ser instável (condição necessária, mas não suficiente). Este é o critério de **Miles-Howard** (1961).

Interpretação: Ri mede a razão entre a energia potencial que uma parcela ganha ao ser deslocada verticalmente (efeito estabilizador da estratificação) e a energia cinética disponível no cisalhamento (efeito desestabilizador). Se a estratificação é suficientemente forte ($\text{Ri} > 1/4$), o cisalhamento não consegue “deslocar” parcelas o suficiente para gerar instabilidade.

20.3 Exemplo Trabalhado: Vento Sobre o Mar

Exemplo 20.1. O vento sopra sobre a superfície do mar com velocidade $U = 5$ m/s. Tome $\rho_{\text{ar}} = 1,2$ kg/m³, $\rho_{\text{água}} = 10^3$ kg/m³, $\gamma = 0,073$ N/m. Determine quais comprimentos de onda são instáveis.

Solução. Tomamos $U_1 = U$ (ar acima), $U_2 = 0$ (água em repouso abaixo), e usamos a *relação de dispersão completa* (20.1) — com gravidade e tensão superficial. O critério de instabilidade ($\omega^2 < 0$) torna-se:

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} U^2 k^2 > \frac{(\rho_2 - \rho_1) g k + \gamma k^3}{\rho_1 + \rho_2}.$$

O lado esquerdo é o termo desestabilizador (cisalhamento); o direito é o estabilizador (gravidade para k pequeno, tensão superficial para k grande). O ponto-chave é o pré-fator inercial: como $\rho_2 \gg \rho_1$,

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \approx \frac{\rho_1}{\rho_2} \approx 1,2 \times 10^{-3}.$$

O acoplamento K-H entre os dois fluidos é *muito fraco* — o ar tem inércia muito menor que a água, e arrasta a interface com pouca eficiência. Resolvendo a desigualdade quadrática em k , encontra-se que apenas uma faixa estreita de ondas *curtas* (na vizinhança de $\lambda_c \sim 1,7$ cm, regime capilar) torna-se instável, e somente para $U > U_{\min} \approx 6,6$ m/s — a chamada *velocidade crítica de Kelvin*. Para $U = 5$ m/s, o sistema é linearmente estável.

Interpretação física. As grandes ondas do oceano *não* são geradas pelo mecanismo K-H simples descrito aqui. Elas surgem por **transferência ressonante** de energia do vento turbulento à superfície, via os mecanismos de Phillips (1957) e Miles (1957): perturbações de pressão turbulentas no ar excitam ondas com a mesma velocidade de fase, transferindo energia continuamente. A análise linear K-H é apenas o início da história das ondas de mar geradas pelo vento. $\square$

20.4 Aplicações Geofísicas e Astrofísicas

A instabilidade K-H é observada em:

- **Atmosfera:** nuvens K-H (padrão “ondulado” em camadas de cisalhamento); *clear-air turbulence* em aviação.
- **Oceano:** mistura em camadas de cisalhamento entre correntes; formação de ondas internas.
- **Astrofísica:** jatos relativísticos de AGNs; interface entre vento solar e magnetosfera; discos de acreção.
- **Fusão nuclear:** instabilidade na interface ablação-combustível em fusão por confinamento inercial.

Conexão com Física Teórica

As instabilidades de Rayleigh-Taylor e Kelvin-Helmholtz são exemplos de *bifurcações* em sistemas de dimensão infinita. Em linguagem de sistemas dinâmicos, o estado base perde estabilidade quando um autovalor do operador linearizado cruza o eixo imaginário. O critério de Richardson $Ri > 1/4$ é análogo a critérios de estabilidade em mecânica hamiltoniana (estabilidade linear de equilíbrios). Em turbulência quântica (superfluidos, condensados de Bose-Einstein), a instabilidade K-H entre componentes do superfluido gera estruturas de vórtices quantizados — uma ponte entre hidrodinâmica clássica e física quântica.

Resumo do Módulo IV

Este módulo explorou dois temas interligados: ondas e instabilidades. Ondas de gravidade de superfície: $\omega^2 = gk \tanh(kH)$, com regimes de águas profundas e rasas. Dispersão, velocidade de grupo, e transporte de energia. Tensão superficial adiciona ondas capilares e define $\ell_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$. Instabilidade de Rayleigh-Taylor: fluido pesado sobre leve. Rayleigh-Plateau: jatos se fragmentam em gotas para $\lambda > 2\pi R$. Kelvin-Helmholtz: camada de cisalhamento é instável; critério de Richardson $Ri > 1/4$ para estabilidade em fluidos estratificados.

Leitura Recomendada

- Tong, Cap. 5, §5.1–5.1.3.
- Acheson, §9.3–9.4.
- Kundu, Cohen & Dowling, §11.3.