

MECÂNICA DOS FLUIDOS

Notas de Aula — Módulo I: Fundamentos

Aulas 1 a 4

Prof. Marcelo Santos Guimarães

*Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Graduação em Física · 1º Semestre 2026*

Baseado nas notas de aula de David Tong (University of Cambridge)

<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/fluids.html>

Março 2026

Sumário

1	Introdução à Mecânica dos Fluidos	3
1.1	O que é um Fluido	3
1.2	A Hipótese do Contínuo	3
1.3	Os Campos Fundamentais e a Descrição Euleriana	4
1.4	A Descrição Lagrangiana	4
1.5	Exemplo Trabalhado: Estimativas de Ordem de Grandeza	5
2	Cinemática dos Fluidos	6
2.1	Linhas de Corrente, Trajetórias e Linhas de Emissão	6
2.2	A Derivada Material	7
2.3	A Equação da Continuidade	7
2.4	Fluidos Incompressíveis	8
2.5	A Função de Corrente	8
2.6	Exemplo Trabalhado: Fonte e Sumidouro em 2D	8
3	Forças e Tensões em Fluidos	10
3.1	Tipos de Forças em Fluidos	10
3.2	O Tensor de Tensões	10
3.3	Pressão Hidrostática e Princípio de Arquimedes	11
3.4	Fluidos Newtonianos e o Tensor de Tensões Viscosas	12
3.5	Exemplo Trabalhado: Atmosfera Isotérmica	12
4	A Equação de Euler	14
4.1	Dedução: Segunda Lei de Newton para Fluidos	14
4.2	A Equação de Euler como Lei de Conservação de Momento	15
4.3	Condições de Contorno	15
4.4	Conservação de Energia e o Teorema de Bernoulli	16
4.5	Exemplo Trabalhado: Tubo de Venturi	16
4.6	Exemplo Adicional: Effluxo de Torricelli	17

1 Introdução à Mecânica dos Fluidos

Aula 1 — 09/03/2026 (Segunda-feira)
Referência: Tong, Cap. 1, §1.1

Objetivos de Aprendizagem

1. Explicar o que é um fluido e enunciar a hipótese do contínuo, identificando suas condições de validade.
2. Definir os campos fundamentais — densidade $\rho(\mathbf{x}, t)$ e velocidade $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — e distinguir entre as descrições Euleriana e Lagrangiana.
3. Compreender por que a mecânica dos fluidos é *universal*: todos os fluidos são governados pelas mesmas equações.
4. Reconhecer a pressão como um campo dinâmico que atua na superfície de parcelas de fluido.

Motivação

Quando aquecemos qualquer substância — um metal, um gás nobre, ou mesmo o plasma de quarks e glúons nos primeiros instantes após o Big Bang —, a matéria escoar. E, notavelmente, o escoamento de *todas* essas substâncias é governado pelo *mesmo* conjunto de equações. Esta universalidade espantosa é o ponto de partida do nosso curso.

No cotidiano, fluidos estão em toda parte: o ar que respiramos, a água que bebemos, o sangue que circula em nossas veias, as correntes oceânicas que regulam o clima. A mecânica dos fluidos explica por que aviões voam (e por que, embarçosamente, Santos Dummond voou antes que os físicos pudessem explicar adequadamente a sustentação!), como o petróleo flui em dutos, e como a dinâmica atmosférica se traduz em previsão do tempo. Neste curso, construiremos as equações que governam todo esse movimento e exploraremos a extraordinária diversidade de comportamentos que emergem delas.

1.1 O que é um Fluido

Na classificação elementar, a matéria se apresenta em três fases: sólida, líquida e gasosa. Líquidos e gases são ambos exemplos de **fluidos**. De maneira intuitiva, um fluido é uma substância que escoar quando submetida a uma tensão de cisalhamento — isto é, que se deforma continuamente sob ação de forças tangenciais, por menores que sejam. Um sólido, em contraste, resiste à deformação e retorna ao seu estado original quando a força cessa (dentro do regime elástico).

Do ponto de vista microscópico, um fluido é um sistema formidavelmente complexo: algo como 10^{23} átomos ou moléculas, cada um seguindo sua própria trajetória sob a ação de forças intermoleculares. Contudo, a maior parte desse movimento microscópico é efêmero e irrelevante para a dinâmica macroscópica. O que importa são os padrões coletivos de longo alcance no tempo e no espaço. E esses padrões estão intimamente ligados a leis de conservação universais — conservação de massa, momento e energia. É essa conexão profunda que explica a universalidade da mecânica dos fluidos.

1.2 A Hipótese do Contínuo

O estudo da mecânica dos fluidos começa com uma aproximação fundamental: a **hipótese do contínuo**. Tratamos o fluido como um meio contínuo, indivisível, ignorando sua estrutura atômica. Sob essa hipótese, o estado do fluido é descrito por *campos* suaves e contínuos:

- A **densidade** $\rho(\mathbf{x}, t)$ — massa por unidade de volume no ponto $\mathbf{x}$ e instante t ;
- A **velocidade** $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — velocidade macroscópica média do fluido no ponto $\mathbf{x}$ e instante t .

A aproximação é excelente quando olhamos em escalas muito maiores que as distâncias interatômicas. A escala relevante é o *livre caminho médio* ℓ — a distância média que uma molécula percorre entre colisões. Para o ar à pressão atmosférica, $\ell \approx 70$ nm; para a água líquida, $\ell \sim 0,3$ nm. Para quantificar a validade, define-se o **número de Knudsen**:

$$\text{Kn} = \frac{\ell}{L}. \quad (1.1)$$

A hipótese do contínuo requer $\text{Kn} \ll 1$, onde L é a escala macroscópica de interesse.

Observação. Ao adotar a descrição contínua, ignoramos a vasta maioria do movimento microscópico dos constituintes. À temperatura ambiente, moléculas de um gás se movem a $\sim 10^2$ m/s, mas esse movimento é aleatório. O campo $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ captura apenas o movimento médio, macroscópico. Existe um estado com $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ — fluido “em repouso” — mesmo que microscopicamente haja agitação térmica intensa.

1.3 Os Campos Fundamentais e a Descrição Euleriana

Uma vez aceita a hipótese do contínuo, a mecânica dos fluidos se torna uma *teoria clássica de campos*: o estado do sistema é especificado por campos definidos em todo o espaço e em todo instante. Os campos primários são $\rho(\mathbf{x}, t)$ (escalar), $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ (vetorial) e $P(\mathbf{x}, t)$ (escalar — pressão, a ser discutida na Aula 3).

Nesta descrição, $\mathbf{x}$ é uma *posição fixa no espaço*. Os campos representam as propriedades do fluido que passa pelo ponto $\mathbf{x}$ no instante t . Essa perspectiva é chamada de **descrição Euleriana** — como uma rede de sensores fixos distribuídos pelo fluido.

Para estudantes de física teórica, vale notar a analogia com a eletrodinâmica: assim como $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ descrevem o estado eletromagnético, ρ e $\mathbf{u}$ descrevem o estado do fluido. A mecânica dos fluidos é uma teoria de campos clássica — com a diferença crucial de que as equações são não lineares.

1.4 A Descrição Lagrangiana

Há uma perspectiva alternativa. Em vez de fixar a posição, podemos *seguir uma parcela específica de fluido* ao longo do seu movimento. Uma parcela inicialmente em $\mathbf{x}_0$ estará, no instante t , na posição $\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0)$ determinada por:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (1.2)$$

Essa perspectiva é a **descrição Lagrangiana**. Note as aspas em “partículas de fluido”: não se trata de átomos individuais, mas de parcelas macroscópicas que mantêm sua identidade.

Comparação das duas descrições

- **Euleriana**: “O que está acontecendo no ponto $\mathbf{x}$ neste instante?” Campos: $\rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.
- **Lagrangiana**: “O que acontece com esta parcela ao longo do tempo?” Trajetória: $\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0)$.

Para escoamentos estacionários ($\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$), ambas convergem.

1.5 Exemplo Trabalhado: Estimativas de Ordem de Grandeza

Exemplo 1.1 (Número de Knudsen em três cenários). Estime Kn para: (a) ar ao redor de um automóvel; (b) sangue em uma arteríola ($d \approx 30 \mu\text{m}$); (c) reentrada atmosférica a 100 km.

Solução.

(a) Ar atmosférico: $\ell \approx 7 \times 10^{-8} \text{ m}$, $L \approx 4 \text{ m}$:

$$\text{Kn} \approx \frac{7 \times 10^{-8}}{4} \approx 2 \times 10^{-8}.$$

A hipótese do contínuo é excelente.

(b) Sangue (suspensão aquosa): $\ell \approx 3 \times 10^{-10} \text{ m}$, $L = 3 \times 10^{-5} \text{ m}$:

$$\text{Kn} \approx 10^{-5}.$$

Descrição contínua válida (para $d \gg$ tamanho da hemácia $\approx 8 \mu\text{m}$).

(c) A 100 km: $\rho \sim 10^{-7} \text{ kg/m}^3$, $\ell \sim 0,1 \text{ m}$, $L \approx 3 \text{ m}$:

$$\text{Kn} \approx 0,03.$$

Na fronteira de validade. Para altitudes maiores, $\text{Kn} > 1$: regime de *fluxo molecular livre*. $\square$

Conexão com Física Teórica

A universalidade da mecânica dos fluidos tem raízes profundas. As equações que governam um fluido são equações para a evolução temporal de quantidades conservadas. Na linguagem moderna, a mecânica dos fluidos é uma *teoria efetiva de baixas energias*: descreve a dinâmica nas escalas longas, independentemente dos detalhes microscópicos. O plasma de quarks e glúons no RHIC/LHC, o fluido de elétrons em grafeno, e até a dinâmica do horizonte de eventos de um buraco negro obedecem às mesmas equações.

Resumo

Um fluido é um meio que se deforma continuamente sob tensão de cisalhamento. A hipótese do contínuo permite descrevê-lo por campos suaves — $\rho(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — desde que $\text{Kn} = \ell/L \ll 1$. A descrição Euleriana fixa a posição; a Lagrangiana segue parcelas. As equações são universais porque codificam leis de conservação fundamentais.

Leitura Recomendada

- Tong, D. — *Lectures on Fluid Mechanics*, Cap. 1, §1.1.
- Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. — *Fluid Mechanics*, Butterworth-Heinemann, 2ª ed., 1987, §1.
- Acheson, D.J. — *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford University Press, 1990, §1.1.

2 Cinemática dos Fluidos

Aula 2 — 11/03/2026 (Quarta-feira)
Referência: Tong, Cap. 1, §1.1.1–1.1.4

Objetivos de Aprendizagem

1. Definir e calcular a derivada material D/Dt , interpretando-a como a taxa de variação seguindo o fluido.
2. Distinguir entre linhas de corrente, trajetórias (*pathlines*) e linhas de emissão (*streaklines*).
3. Deduzir a equação da continuidade a partir da conservação de massa.
4. Enunciar a condição de incompressibilidade $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e definir a função de corrente ψ .

Motivação

Na aula anterior, definimos os campos fundamentais. Agora precisamos de ferramentas para descrever *como o fluido se move* — a cinemática — antes de perguntar *por que se move* (dinâmica, Aulas 3 e 4). A questão central: como expressar a taxa de variação de uma grandeza quando o “observador” é arrastado pelo escoamento? A resposta — a derivada material — é o conceito-chave desta aula.

2.1 Linhas de Corrente, Trajetórias e Linhas de Emissão

Existem três formas principais de visualizar um escoamento:

Trajetoórias (*pathlines*)

Uma **trajeto ria**   o caminho percorrido por uma parcela ao longo do tempo:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t). \quad (2.1)$$

Linhas de corrente (*streamlines*)

Uma **linha de corrente**   tangente a $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ em cada ponto, num instante *fixo* t :

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(s), t) \quad [t \text{ fixo}]. \quad (2.2)$$

São uma “fotografia instantânea” do campo de velocidade. Em 2D: $dx/u_1 = dy/u_2$.

Linhas de emissão (*streaklines*)

Uma **linha de emissão**   o conjunto de posições, no instante t , de todas as parcelas que passaram por um dado ponto $\mathbf{x}_0$ em instantes anteriores.   o que vemos ao injetar fumaça ou corante num ponto fixo.

Resultado 2.1 — Coincidência dos três tipos de linhas

Para escoamentos **estacionários** ($\partial\mathbf{u}/\partial t = 0$), trajetórias, linhas de corrente e linhas de emissão *coincidem*. Para escoamentos dependentes do tempo, em geral diferem.

Exemplo 2.1 (Escoamento não estacionário). Considere $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (\alpha y t, \beta)$ com $\alpha, \beta > 0$. As trajetórias, obtidas integrando $\dot{x} = \alpha y t$ e $\dot{y} = \beta$, são *cúbicas*: $x = x_0 + \frac{\alpha}{2} y_0 t^2 + \frac{\alpha \beta}{3} t^3$. As linhas de corrente (para t_0 fixo) são *parábolas*: $x = x_0 + \alpha y_0 t_0 s + \frac{1}{2} \alpha \beta t_0 s^2$. A diferença ilustra que esses conceitos são distintos para escoamentos transientes.

2.2 A Derivada Material

Seja $\phi(\mathbf{x}, t)$ um campo escalar qualquer. Se seguimos uma parcela de fluido cuja trajetória é $\mathbf{x}(t)$, o valor de ϕ ao longo dessa parcela é $\phi(\mathbf{x}(t), t)$. Sua taxa de variação total é:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi.$$

Derivada Material

$$\boxed{\frac{D\phi}{Dt} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi} \quad (2.3)$$

O primeiro termo é a variação **local** (ponto fixo). O segundo, $\mathbf{u} \cdot \nabla \phi$, é a variação **advectiva** — mudança devida ao transporte da parcela para uma região onde ϕ tem valor diferente.

A derivada material é a ponte entre as descrições Euleriana e Lagrangiana. Para campos vetoriais:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (2.4)$$

O termo não linear $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ será responsável por grande parte da riqueza — e da dificuldade — da mecânica dos fluidos.

Observação (Interpretação física). Imagine que você está num barco à deriva num rio. A temperatura da água que você mede muda por duas razões: (1) a temperatura local varia com o tempo (aquecimento solar); (2) o rio leva você para uma região de temperatura diferente. A derivada material captura ambos os efeitos.

2.3 A Equação da Continuidade

A primeira equação da mecânica dos fluidos expressa o fato mais simples: **massa se conserva localmente**. Considere um volume fixo V com superfície $S = \partial V$. A massa em V é $M = \int_V \rho \, dV$. Conservação de massa exige:

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = - \int_S \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \, dV,$$

onde usamos o teorema da divergência. Como vale para todo V :

Resultado 2.2 — Equação da Continuidade

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0} \quad (2.5)$$

Aqui ρ é a densidade de massa e $\mathbf{J} = \rho \mathbf{u}$ é a densidade de corrente de massa. A equação tem a mesma forma que a conservação de carga em eletrodinâmica: $\partial \rho_q / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{J}_q = 0$.

Usando a derivada material:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.6)$$

2.4 Fluidos Incompressíveis

Na maior parte deste curso, trataremos o fluido como **incompressível** (ρ constante). Nesse caso:

Resultado 2.3 — Condição de Incompressibilidade

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.7)$$

O campo de velocidade é *solenoidal*. Fisicamente: o volume de qualquer parcela se conserva.

A incompressibilidade é válida quando $|\mathbf{u}| \ll c_s$ (velocidade do som). A razão $|\mathbf{u}|/c_s$ é o **número de Mach** (Ma). Para ar: $c_s \approx 340$ m/s; para água: $c_s \approx 1500$ m/s. O fenômeno excluído por esta aproximação é o *som*.

Observação. A condição $D\rho/Dt = 0$ é mais fraca que $\rho = \text{const}$: permite um fluido *estratificado* onde diferentes parcelas têm diferentes densidades (relevante em oceanografia).

2.5 A Função de Corrente

Para fluidos incompressíveis com $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, podemos escrever $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$. Para escoamentos 2D no plano (x, y) , tomamos $\mathbf{A} = (0, 0, \psi(x, y, t))$:

Função de Corrente ψ — coordenadas cartesianas

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.8)$$

A condição $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ é automaticamente satisfeita. As **linhas $\psi = \text{const}$ são as linhas de corrente**: como $\mathbf{u} \cdot \nabla \psi = 0$, a velocidade é tangente a essas curvas.

Em coordenadas polares (r, θ) :

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (2.9)$$

2.6 Exemplo Trabalhado: Fonte e Sumidouro em 2D

Exemplo 2.2. Considere $\mathbf{u} = \frac{Q}{2\pi r} \hat{\mathbf{r}}$ em coordenadas polares, onde Q tem dimensões $[\text{m}^2/\text{s}]$.

Solução.

(a) **Incompressibilidade:** $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Q}{2\pi} \right) = 0$ para $r \neq 0$. ✓

(b) **Função de corrente:** De $u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r}$, obtemos $\psi = \frac{Q\theta}{2\pi}$. As linhas de corrente ($\theta = \text{const}$) são retas radiais.

(c) **Interpretação:** $Q > 0$: **fonte pontual**; $Q < 0$: **sumidouro**. A vazão total $\oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = Q$, independente de r . □

Conexão com Física Teórica

A equação da continuidade é o protótipo de uma *lei de conservação local*. Na física teórica, leis de conservação decorrem de simetrias (teorema de Noether). A conservação de massa está associada à simetria de reparametrização das etiquetas Lagrangianas. Na eletrodinâmica, a conservação de carga tem simetria $U(1)$. Como veremos, o escoamento potencial em 2D é matematicamente idêntico à eletrostática 2D — a equação de Laplace é a mesma!

Resumo

Trajetórias, linhas de corrente e linhas de emissão coincidem apenas para escoamentos estacionários. A derivada material $D\phi/Dt = \partial\phi/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi$ mede a taxa de variação seguindo o fluido. A equação da continuidade $\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0$ expressa conservação local de massa. Para fluidos incompressíveis, reduz-se a $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, e a função de corrente ψ parametriza escoamentos 2D com $\psi = \text{const}$ sendo linhas de corrente.

Leitura Recomendada

- Tong, D. — *Lectures on Fluid Mechanics*, Cap. 1, §1.1.1–1.1.4.
- Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. — *Fluid Mechanics*, §1.
- Kundu, P.K., Cohen, I.M. & Dowling, D.R. — *Fluid Mechanics*, Academic Press, 6ª ed., 2015, §3.1–3.3.

3 Forças e Tensões em Fluidos

Aula 3 — 16/03/2026 (Segunda-feira)
Referência: Tong, Cap. 2, §2.1.1 e Cap. 3, §3.1

Objetivos de Aprendizagem

1. Classificar as forças em forças de corpo e forças de superfície.
2. Definir o tensor de tensões σ_{ij} e demonstrar que ele é simétrico.
3. Deduzir a pressão hidrostática e o princípio de Arquimedes.
4. Definir o tensor de tensões viscosas para fluidos Newtonianos.
5. Reconhecer o tensor de taxa de deformação E_{ij} .

Motivação

Nas duas aulas anteriores, estabelecemos a cinemática de fluidos. Agora, passamos à dinâmica: *quais forças causam o movimento?* Na mecânica de partículas, listamos as forças e aplicamos $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Em fluidos, a questão é mais sutil: as forças agem sobre *superfícies* de parcelas. Isso leva ao tensor de tensões — uma generalização da pressão. Pense em mel escorrendo de uma colher: a viscosidade é uma “força de atrito interna” que retarda o escoamento.

3.1 Tipos de Forças em Fluidos

As forças sobre uma parcela ocupando volume V com superfície $S = \partial V$ se dividem em:

Forças de corpo (volume): atuam sobre todo o volume, proporcionalmente à massa. Exemplo principal: gravidade, $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$. Força total: $\mathbf{F}_{\text{corpo}} = \int_V \mathbf{f} \, dV$.

Forças de superfície: atuam na superfície da parcela, exercidas pelo fluido circundante (pressão, cisalhamento viscoso). Força total: $\mathbf{F}_{\text{sup}} = \int_S \mathbf{f}_S \, dS$.

3.2 O Tensor de Tensões

Para descrever as forças de superfície, precisamos de um objeto que relacione a orientação da superfície ($\hat{\mathbf{n}}$) com a força exercida: o **tensor de tensões** $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$.

Observação (Nota para a turma — Tensores de ordem 2). Esta é provavelmente a primeira vez que muitos de vocês encontram um tensor de ordem 2. A ideia é simples: um vetor precisa de um índice (3 componentes); o tensor de tensões precisa de *dois* índices (9 componentes em 3D) porque relaciona duas direções: a orientação da superfície e a direção da força.

Tensor de tensões

A força por unidade de área sobre uma superfície com normal $\hat{\mathbf{n}}$ é:

$$f_i = \sigma_{ij} n_j \quad (3.1)$$

usando a *convenção de soma de Einstein*: índice repetido (j) implica soma sobre $j = 1, 2, 3$.

Observação (Convenção de soma de Einstein). Sempre que um índice latino aparece exatamente duas vezes no mesmo termo, uma soma está implícita. Exemplo: $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Interpretação: σ_{ij} é a força na direção i sobre uma face com normal na direção j . Componentes diagonais (σ_{11}) são tensões *normais*; componentes fora da diagonal (σ_{12}) são tensões de *cisalhamento*.

A pressão como caso especial

Para um fluido em repouso, a única força de superfície é a pressão, que é isotrópica:

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij}. \quad (3.2)$$

O sinal negativo é convencional: pressão positiva comprime.

Simetria do tensor de tensões

Proposição 3.1. O tensor de tensões é simétrico: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Demonstração. Considere um cubo infinitesimal de lado L . As tensões σ_{12} e σ_{21} produzem um torque ao redor do centro:

$$\tau = L^3(\sigma_{12} - \sigma_{21}) + \mathcal{O}(L^4).$$

O momento de inércia escala como $I \sim \rho L^5$. A aceleração angular seria $\alpha = \tau/I \sim (\sigma_{12} - \sigma_{21})/(\rho L^2)$. Se $\sigma_{12} \neq \sigma_{21}$, teríamos $\alpha \rightarrow \infty$ quando $L \rightarrow 0$ — fisicamente absurdo. Logo, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ (e analogamente para todos os pares). $\square$

Esse argumento — “torques infinitos são proibidos” — é típico da mecânica de meios contínuos.

3.3 Pressão Hidrostática e Princípio de Arquimedes

Para fluido em repouso ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) num campo gravitacional $\mathbf{f} = -\rho g \hat{\mathbf{z}}$, o equilíbrio exige:

$$\nabla P = \rho \mathbf{g} = -\rho g \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.3)$$

Para ρ uniforme, integrando:

Resultado 3.1 — Pressão Hidrostática

$$P(z) = P_0 - \rho g z \quad (3.4)$$

onde P_0 é a pressão na superfície ($z = 0$). A pressão aumenta com a profundidade ($z < 0$). Cada ≈ 10 m de profundidade em água $\Rightarrow$ aumento de ≈ 1 atm.

Para um objeto imerso, a força do fluido sobre ele é:

$$\mathbf{F} = - \int_S P \, d\mathbf{S} = - \int_V \nabla P \, dV = - \int_V \rho \mathbf{g} \, dV = \rho_{\text{fluido}} V_{\text{imerso}} g \hat{\mathbf{z}}.$$

Resultado 3.2 — Princípio de Arquimedes

O empuxo sobre um corpo imerso é igual ao peso do fluido deslocado:

$$F_{\text{empuxo}} = \rho_{\text{fluido}} V_{\text{imerso}} g \quad (\text{dirigido para cima}) \quad (3.5)$$

O corpo flutua se $\rho_{\text{corpo}} < \rho_{\text{fluido}}$.

Observação. A pressão hidrostática $P_0 - \rho g z$ pode ser absorvida redefinindo $P \rightarrow P_0 - \rho g z + P'$, de modo que a equação dinâmica envolve apenas P' . Isso permite *ignorar a gravidade* em muitos problemas — um truque utilizado extensivamente no restante do curso.

3.4 Fluidos Newtonianos e o Tensor de Tensões Viscosas

Quando o fluido se move, surgem forças adicionais de atrito interno (viscosidade). O tensor de tensões geral é:

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (3.6)$$

onde τ_{ij} é o **tensor de tensões viscosas**. Para um fluido **Newtoniano** (tensão viscosa linear nas derivadas de velocidade) e isotrópico, a forma é fixada por invariância rotacional. A combinação relevante é o **tensor de taxa de deformação**:

Taxa de deformação (*strain rate tensor*)

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.7)$$

E_{ij} é a parte simétrica do gradiente de velocidade. Quantifica a deformação (estiramento e cisalhamento), excluindo rotação pura.

Note que E_{ij} se anula para rotação rígida $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$ (exercício instrutivo para a lista). Para fluido Newtoniano incompressível:

Resultado 3.3 — Tensor de tensões para fluido Newtoniano incompressível

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \quad (3.8)$$

onde μ é a **viscosidade dinâmica** [Pa · s]. A **viscosidade cinemática** é $\nu = \mu/\rho$ [m²/s].

Valores típicos de μ a 20 °C: ar $\approx 1,8 \times 10^{-5}$ Pa · s; água $\approx 10^{-3}$; mel ≈ 2 –10; vidro fundido $\approx 10^{12}$.

3.5 Exemplo Trabalhado: Atmosfera Isotérmica

Exemplo 3.1. Use a lei dos gases ideais e a condição hidrostática para encontrar $P(z)$ na atmosfera, assumindo temperatura constante T .

Solução. Condição hidrostática: $dP/dz = -\rho g$. Gás ideal: $P = \rho k_B T/m$, logo $\rho = Pm/(k_B T)$:

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{mg}{k_B T} P.$$

EDO separável com solução:

$$P(z) = P_0 e^{-z/H}, \quad H = \frac{k_B T}{mg}. \quad (3.9)$$

H é a **escala de altura**. Para ar ($M \approx 29$ g/mol, $T \approx 250$ K):

$$H = \frac{k_B T}{mg} \approx \frac{1,38 \times 10^{-23} \times 250}{4,8 \times 10^{-26} \times 9,8} \approx 7,3 \text{ km}.$$

No topo do Everest ($\sim 8,8$ km): $P \approx P_0 e^{-1,2} \approx 0,30 P_0$ — cerca de 30% da pressão ao nível do mar. $\square$

Conexão com Física Teórica

O tensor de tensões σ_{ij} tem papel que vai além dos fluidos. Em relatividade geral, o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ generaliza σ_{ij} para incluir densidade de energia e fluxo de momento. A equação de Euler é o limite não relativístico de $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ para um fluido perfeito: $T^{\mu\nu} = (\rho + P/c^2)u^\mu u^\nu + P\eta^{\mu\nu}$. Além disso, a decomposição de $\partial_i u_j$ em parte simétrica (E_{ij}) e antissimétrica (Ω_{ij} — vorticidade) corresponde à decomposição em representações irredutíveis de $SO(3)$: spin 2 (traço + simétrico sem traço), spin 0 (traço) e spin 1 (antissimétrico).

Resumo

Forças em fluidos se dividem em forças de corpo ($\propto$ volume) e de superfície ($\propto$ área). O tensor de tensões σ_{ij} especifica a força de superfície: $f_i = \sigma_{ij}n_j$; é simétrico pelo argumento dos torques infinitos. Em repouso, $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$, levando à pressão hidrostática e ao princípio de Arquimedes. Para fluidos Newtonianos em movimento: $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$, onde $E_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ é o tensor de taxa de deformação e μ a viscosidade.

Leitura Recomendada

- Tong, D. — *Lectures on Fluid Mechanics*, Cap. 2, §2.1.1 e Cap. 3, §3.1–3.1.1.
- Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. — *Fluid Mechanics*, §2.
- Kundu, P.K., Cohen, I.M. & Dowling, D.R. — *Fluid Mechanics*, §2.3–2.4, §4.1–4.3.

4 A Equação de Euler

Aula 4 — 18/03/2026 (Quarta-feira)
Referência: Tong, Cap. 2, §2.1

Objetivos de Aprendizagem

1. Deduzir a equação de Euler a partir da conservação de momento.
2. Reformulá-la como lei de conservação, identificando o tensor Π_{ij} .
3. Enunciar as condições de contorno para fluidos ideais (impermeabilidade).
4. Deduzir a conservação de energia e o teorema de Bernoulli.
5. Aplicar Bernoulli: tubo de Venturi, effluxo de Torricelli.

Motivação

Nas três aulas anteriores, construímos todo o andaime: definimos o que é um fluido (Aula 1), sua cinemática (Aula 2) e as forças que atuam sobre ele (Aula 3). Estamos agora prontos para escrever a equação de movimento — a *segunda lei de Newton para fluidos*. Quando ignoramos a viscosidade, obtemos a **equação de Euler**, publicada por Leonhard Euler em 1757. É uma das mais antigas e importantes equações de campo da física — anterior em quase um século às equações de Maxwell.

4.1 Dedução: Segunda Lei de Newton para Fluidos

Considere um volume fixo V com superfície $S = \partial V$. O momento linear total em V é $\mathbf{P} = \int_V \rho \mathbf{u} dV$. Pela segunda lei de Newton, $d\mathbf{P}/dt = \text{forças}$. Mas o momento em V muda não só por forças, mas também porque fluido *entra ou sai* de V carregando momento.

Fluxo de momento pela superfície

Um elemento $d\mathbf{S}$ na superfície deixa escapar, em tempo dt , um volume $(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS dt$ de fluido. O momento carregado é $\rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS dt$. Logo:

$$\text{Fluxo de momento} = \int_S (\rho \mathbf{u}) (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}).$$

Incluindo pressão e forças de corpo:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = - \int_S (\rho \mathbf{u}) (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}) - \int_S P d\mathbf{S} + \int_V \mathbf{f} dV.$$

Usando o teorema da divergência e a incompressibilidade (ρ constante, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$):

$$\int_V \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] dV = \int_V [-\nabla P + \mathbf{f}] dV.$$

Como vale para todo V :

Resultado 4.1 — Equação de Euler

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \mathbf{f} \quad (4.1)$$

ou, expandindo a derivada material:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla P + \mathbf{f}. \quad (4.2)$$

Juntamente com $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$: 4 equações para 4 incógnitas $(\mathbf{u}, P)$. A equação é **não linear** em $\mathbf{u}$ pelo termo $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$.

Interpretação termo a termo:

- $\rho \partial \mathbf{u} / \partial t$: variação local do momento por unidade de volume;
- $\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$: advecção de momento pelo escoamento (termo não linear);
- $-\nabla P$: força de pressão (de alta para baixa pressão);
- $\mathbf{f}$: forças externas (gravidade, etc.).

Observação. Uma pressão constante P uniforme não exerce força: apenas *gradientes* de pressão importam. Se o fluido empurra um vizinho, o vizinho empurra de volta com força igual. O efeito líquido é zero sem diferença de pressão.

4.2 A Equação de Euler como Lei de Conservação de Momento

Na ausência de forças externas ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$), a equação de Euler pode ser escrita na forma canônica de conservação:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (4.3)$$

onde

$$\Pi_{ij} = \rho u_i u_j + P \delta_{ij} \quad (4.4)$$

é o **tensor de fluxo de momento**. Ele tem duas contribuições: (i) $\rho u_i u_j$ — transporte advectivo de momento; (ii) $P \delta_{ij}$ — fluxo de momento devido à pressão.

A estrutura $\partial \rho_{\text{mom}} / \partial t + \partial(\text{fluxo}) / \partial x = 0$ é a forma canônica de conservação local. A novidade: a quantidade conservada (momento) é vetorial, então o fluxo é um *tensor* de ordem 2.

Observação. Se fizermos um furo numa caixa com fluido sob pressão, o fluido escapa e a taxa de momento saindo é proporcional a P . Pressão é, literalmente, fluxo de momento — manifestação macroscópica do momento dos átomos em agitação térmica.

4.3 Condições de Contorno

Na superfície de um corpo sólido, para fluido **ideal**:

Condição de contorno — fluido ideal

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (\text{na superfície do sólido}) \quad (4.5)$$

Impermeabilidade: a componente normal se anula; a componente tangencial é livre (o fluido pode *deslizar* sem atrito).

Contraste com fluidos viscosos (Módulo III): na equação de Navier-Stokes, a condição é $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ na superfície (*no-slip* — não deslizamento). A diferença entre essas duas condições gera toda a física da camada limite de Prandtl.

4.4 Conservação de Energia e o Teorema de Bernoulli

Usamos a identidade vetorial

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (4.6)$$

para reescrever a equação de Euler. Tomando o produto escalar com $\mathbf{u}$, para força conservativa $\mathbf{f} = -\nabla \Phi$ e fluido incompressível:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) + \nabla \cdot (\mathbf{u} H) = 0, \quad (4.7)$$

onde definimos a **função de Bernoulli**:

Função de Bernoulli

$$H = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + P + \Phi \quad (4.8)$$

Soma da energia cinética por unidade de volume, da pressão e da energia potencial. A equação (4.7) é a conservação local de energia.

Para escoamento **estacionário** ($\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$), a equação se reduz a $\mathbf{u} \cdot \nabla H = 0$:

Resultado 4.2 — Teorema de Bernoulli

Para escoamentos estacionários de fluidos ideais, incompressíveis, sob força conservativa:

$$\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + P + \Phi = \text{constante ao longo de cada linha de corrente} \quad (4.9)$$

Atenção: H pode ter valores *diferentes* em linhas de corrente diferentes. A constância é ao longo de cada linha, não no espaço todo.

Fisicamente: onde o fluido é rápido ($|\mathbf{u}|^2$ grande), a pressão é baixa, e vice-versa.

4.5 Exemplo Trabalhado: Tubo de Venturi

Exemplo 4.1. Água escoa de forma estacionária por um tubo horizontal que se estreita de seção A para seção $a < A$. Velocidade na seção larga: U ; pressão: P_A . Determine velocidade e pressão na seção estreita.

Solução.

Passo 1 — Conservação de massa (fluido incompressível, vazão constante):

$$UA = ua \implies u = U \frac{A}{a}. \quad (4.10)$$

Como $A > a$: velocidade na seção estreita é *maior*, $u > U$.

Passo 2 — Bernoulli ao longo de uma linha de corrente (tubo horizontal, $\Phi = \text{const}$):

$$\frac{1}{2} \rho U^2 + P_A = \frac{1}{2} \rho u^2 + P_a. \quad (4.11)$$

Substituindo $u = UA/a$:

$$P_a = P_A + \frac{1}{2}\rho U^2 \left[1 - \left(\frac{A}{a} \right)^2 \right] \quad (4.12)$$

Como $A > a$: $(A/a)^2 > 1$ e $P_a < P_A$. A pressão *diminui* na seção estreita.

Pode parecer contra-intuitivo (“o fluido está sendo comprimido!”), mas a lógica de Bernoulli é clara: é precisamente a *queda* de pressão que *causa* a aceleração de U para u .

Aplicação: o tubo de Venturi é usado em medidores de vazão. O mesmo princípio explica o funcionamento de um pulverizador: o estreitamento reduz a pressão abaixo da atmosférica, sugando líquido de um reservatório.

4.6 Exemplo Adicional: Effluxo de Torricelli

Exemplo 4.2. Um grande tanque aberto contém água até altura h . Um pequeno orifício na base permite a saída de água. Qual a velocidade de saída?

Solução. Bernoulli entre a superfície livre (1) e o orifício (2):

$$\text{Ponto 1 (superfície): } |\mathbf{u}_1| \approx 0, P_1 = P_{\text{atm}}, z_1 = h.$$

$$\text{Ponto 2 (orifício): } |\mathbf{u}_2| = v, P_2 = P_{\text{atm}}, z_2 = 0.$$

$$0 + P_{\text{atm}} + \rho gh = \frac{1}{2}\rho v^2 + P_{\text{atm}} + 0.$$

Teorema de Torricelli

$$v = \sqrt{2gh} \quad (4.13)$$

A velocidade de saída é idêntica à de um corpo em queda livre de altura h — resultado elegante: a água horizontal sai como se tivesse “caído” verticalmente.

Conexão com Física Teórica

A equação de Euler pode ser derivada de um *princípio variacional*. A ação é

$$S = \int dt \int d^3x \left[\frac{1}{2}\rho |\mathbf{u}|^2 - \rho\Phi - f(\rho) \right],$$

onde $f(\rho)$ codifica a equação de estado. As equações de Euler-Lagrange produzem a equação de Euler e a equação da continuidade simultaneamente. A pressão emerge como um *multiplicador de Lagrange* associado à restrição de incompressibilidade! Essa formulação, desenvolvida por Clebsch e aperfeiçoada por V.I. Arnold nos anos 1960, conecta a mecânica dos fluidos ao formalismo Hamiltoniano e à geometria de grupos de difeomorfismos. A mecânica dos fluidos ideal possui a mesma elegância variacional que a mecânica de partículas e a eletrodinâmica.

Resumo

A equação de Euler, $\rho D\mathbf{u}/Dt = -\nabla P + \mathbf{f}$, é a segunda lei de Newton para fluidos ideais. Pode ser reescrita como conservação de momento: $\partial(\rho u_i)/\partial t + \partial \Pi_{ij}/\partial x_j = 0$, com $\Pi_{ij} = \rho u_i u_j + P \delta_{ij}$. Condição de contorno: $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ (impermeabilidade). A conservação de energia leva ao teorema de Bernoulli: $\frac{1}{2}\rho |\mathbf{u}|^2 + P + \Phi = \text{const}$ ao longo de linhas de corrente estacionárias. Bernoulli explica a aceleração em estreitamentos (queda de pressão) e o effluxo de Torricelli ($v = \sqrt{2gh}$).

Leitura Recomendada

- Tong, D. — *Lectures on Fluid Mechanics*, Cap. 2, §2.1 (incluindo §2.1.1–2.1.4).
- Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. — *Fluid Mechanics*, §2 e §5.
- Acheson, D.J. — *Elementary Fluid Dynamics*, §1.2–1.4.