

MECÂNICA DOS FLUIDOS

Notas de Aula — Módulo V: Fluidos em Rotação e Geofísica

Aulas 21 a 23

Prof. Marcelo Santos Guimarães

*Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Graduação em Física · 1º Semestre 2026*

Baseado nas notas de aula de David Tong (University of Cambridge)

<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/fluids.html>

Maio–Junho 2026

Sumário

21 Fluidos em Referencial Rotante	3
21.1 A Equação de Euler em Referencial Rotante	3
21.2 O Número de Rossby	4
21.3 As Equações de Águas Rasas Linearizadas	4
21.4 Balanço Geostrófico	5
21.5 Exemplo Trabalhado: Desvio de Coriolis	5
22 Teorema de Taylor-Proudman e Colunas de Taylor	7
22.1 Demonstração do Teorema	7
22.2 Colunas de Taylor	8
22.3 A Camada de Ekman	8
22.4 Extensão: Fluidos Estratificados	9
23 Ondas de Rossby e Aplicações Geofísicas	10
23.1 Vorticidade Potencial e sua Conservação	10
23.2 Ondas de Poincaré (Inércia-Gravidade)	11
23.3 O Plano- β e as Ondas de Rossby	11
23.4 Mecanismo Físico das Ondas de Rossby	12
23.5 Aplicações Geofísicas	13

21 Fluidos em Referencial Rotante

Aula 21 — 27/05/2026 (Quarta-feira)

Referência: Tong, §4.3–4.3.2; Kundu §13.1–13.4

Objetivos de Aprendizagem

1. Escrever a equação de Euler num referencial rotante, identificando as forças fictícias (Coriolis e centrífuga).
2. Definir o número de Rossby $Ro = U/(fL)$ e interpretar o limite $Ro \ll 1$.
3. Formular as equações de águas rasas (*shallow water*) linearizadas com efeito de Coriolis.
4. Deduzir o balanço geostrófico e interpretar o escoamento ao longo de isóbaras.
5. Aplicar o balanço geostrófico a padrões atmosféricos (ciclones, anticiclones).

Motivação

A Terra gira. Este fato simples tem consequências profundas para a dinâmica de fluidos em grandes escalas: oceanos, atmosfera, e o núcleo líquido do planeta. A rotação introduz duas forças fictícias — centrífuga e de Coriolis. A força de Coriolis, proporcional à velocidade do fluido, é responsável pelos padrões globais de ventos, pelas correntes oceânicas, pela deflexão de projéteis em longas trajetórias, e pela rotação de ciclones e anticiclones. Neste módulo, incorporamos a rotação à mecânica dos fluidos e exploramos os fenômenos qualitativamente novos que emergem.

21.1 A Equação de Euler em Referencial Rotante

Da mecânica clássica, sabemos que num referencial que gira com velocidade angular constante Ω , a segunda lei de Newton adquire dois termos adicionais — as forças fictícias:

Resultado 21.1 — Equação de Euler no referencial rotante

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g} - 2\Omega \times \mathbf{u} - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{x}) \quad (21.1)$$

onde $\mathbf{u}$ é a velocidade medida no referencial rotante, e os dois últimos termos são:

- $-2\Omega \times \mathbf{u}$: **aceleração de Coriolis** — perpendicular a $\mathbf{u}$ e a Ω ; não faz trabalho.
- $-\Omega \times (\Omega \times \mathbf{x})$: **aceleração centrífuga** — pode ser absorvida numa redefinição da gravidade efetiva: $\mathbf{g}_{\text{eff}} = \mathbf{g} - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{x}) = -\nabla \Phi_{\text{eff}}$.

Absorvendo a centrífuga na pressão ($P \rightarrow P + \rho \Phi_{\text{eff}}$), ficamos com:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P' - g\hat{\mathbf{z}} - 2\Omega \times \mathbf{u}, \quad (21.2)$$

onde P' inclui os termos de gravidade efetiva e $\hat{\mathbf{z}}$ é o “para cima” local. Toda a física nova reside no termo de Coriolis.

Observação. A força de Coriolis é *perpendicular* à velocidade: $(-2\Omega \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$. Logo, ela *não faz trabalho* e não altera a energia cinética. Ela apenas desvia a trajetória — no hemisfério norte, para a *direita* da direção do movimento; no sul, para a esquerda.

21.2 O Número de Rossby

Para decidir quando a rotação é importante, comparamos o termo de Coriolis com o termo inercial:

$$\frac{|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}|}{|2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}|} \sim \frac{U^2/L}{2\Omega U} = \frac{U}{2\Omega L}. \quad (21.3)$$

Número de Rossby

$$\text{Ro} \equiv \frac{U}{fL} \quad (21.4)$$

onde $f = 2\Omega \sin \theta_{\text{lat}}$ é o **parâmetro de Coriolis** na latitude θ_{lat} . Algumas referências preferem $\text{Ro} = U/(2\Omega L)$ (sem a dependência latitudinal explícita); os dois diferem por um fator $\sin \theta_{\text{lat}}$ de $\mathcal{O}(1)$, e a interpretação do limite $\text{Ro} \ll 1$ é a mesma.

Para a Terra: $\Omega \approx 7,3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ em latitudes médias. Logo $\text{Ro} \sim U/(10^{-4} L)$.

Fenômeno	U (m/s)	L (km)	Ro	Regime
Tornado	50	0,1	5×10^3	Coriolis irrelevante
Ciclone extratropical	10	1000	0,1	Coriolis dominante
Corrente do Golfo	1	100	0,1	Coriolis dominante
Circulação global	10	5000	0,02	Fortemente rotacional

Para $\text{Ro} \ll 1$, os termos inerciais $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ podem ser desprezados: entramos no regime *dominado pela rotação*.

21.3 As Equações de Águas Rasas Linearizadas

Para oceanos e atmosfera, a profundidade/altura ($H \sim \text{km}$) é muito menor que a extensão horizontal ($L \sim 10^3 \text{ km}$): a aproximação de **águas rasas** (*shallow water*) é adequada. Tomamos velocidade horizontal $\mathbf{u} = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ independente de z , e a superfície em $z = \eta(x, y, t)$ com $|\eta| \ll H$.

Linearizando e incluindo Coriolis ($f = 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{z}}$), obtemos as **equações de águas rasas linearizadas**:

Resultado 21.2 — Equações de águas rasas linearizadas com rotação

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (21.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = +fv - g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (21.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu - g \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (21.7)$$

Três equações para três incógnitas: u, v, η .

21.4 Balanço Geostrófico

Para escoamentos *estacionários* ($\partial/\partial t = 0$), com $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$, as Eqs. (21.6)–(21.7) dão:

Resultado 21.3 — Balanço geostrófico

$$u = -\frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad v = +\frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (21.8)$$

O escoamento é *perpendicular* ao gradiente de pressão (e de η): o vento sopra *ao longo* das isóbaras, não das altas para as baixas pressões! Isso é a essência do balanço geostrófico: a força de Coriolis equilibra exatamente o gradiente de pressão.

Consequências para mapas meteorológicos:

- No hemisfério norte ($f > 0$): o vento gira no sentido anti-horário ao redor de centros de baixa pressão (**ciclones**) e no sentido horário ao redor de altas (**anticiclones**).
- No hemisfério sul: rotações invertidas.
- A altura η funciona como função de corrente: $\mathbf{u} \cdot \nabla \eta = 0$, o escoamento segue linhas $\eta = \text{const}$ (isóbaras).

21.5 Exemplo Trabalhado: Desvio de Coriolis

Exemplo 21.1. Um projétil é disparado para o norte com velocidade $v_0 = 500$ m/s na latitude de 30° (hemisfério norte). Estime o desvio lateral após percorrer $L = 10$ km.

Solução. Tempo de voo: $T = L/v_0 = 10^4/500 = 20$ s. Parâmetro de Coriolis: $f = 2\Omega \sin 30^\circ = 2 \times 7,3 \times 10^{-5} \times 0,5 = 7,3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. A aceleração de Coriolis na direção x (leste) é $a_x = f v_0 = 7,3 \times 10^{-5} \times 500 = 0,037 \text{ m/s}^2$. Desvio: $\delta x = \frac{1}{2} a_x T^2 = \frac{1}{2} \times 0,037 \times 400 = 7,3$ m.

O projétil desvia ≈ 7 m para a direita. Ro $= v_0/(fL) = 500/(7,3 \times 10^{-5} \times 10^4) \approx 700 \gg 1$: a rotação é uma pequena correção, mas mensurável em artilharia de longo alcance. $\square$

Conexão com Física Teórica

A força de Coriolis tem uma interpretação geométrica elegante: ela é a manifestação de uma *conexão* no fibrado tangente à esfera em rotação. Em linguagem de teoria de gauge, a rotação da Terra define um “campo de gauge” $\mathbf{A}_{\text{Coriolis}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$, e a força de Coriolis é análoga à força de Lorentz $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, com o parâmetro de Coriolis f desempenhando o papel de um “campo magnético” efetivo. Esta analogia é precisa: o transporte paralelo neste “campo” explica a precessão do pêndulo de Foucault e a fase geométrica de Berry associada.

Resumo

No referencial rotante, a equação de Euler adquire a força de Coriolis $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ (perpendicular a $\mathbf{u}$, não faz trabalho) e a centrífuga (absorvida na pressão). O número de Rossby $\text{Ro} = U/(fL)$ determina se a rotação é importante. Para $\text{Ro} \ll 1$: balanço geostrófico — o vento sopra ao longo das isóbaras, não através delas. Ciclones giram anti-horário no hemisfério norte.

Leitura Recomendada

- Tong, §4.3–4.3.2 (Rotating frame, shallow water, geostrophic balance).

- Kundu, Cohen & Dowling, *Fluid Mechanics*, §13.1–13.4.

22 Teorema de Taylor-Proudman e Colunas de Taylor

Aula 22 — 01/06/2026 (Segunda-feira)

Referência: Tong, §4.3 (implícito); Kundu §13.5–13.6; Acheson §8.9

Objetivos de Aprendizagem

1. Demonstrar o teorema de Taylor-Proudman: $\partial \mathbf{u} / \partial z = 0$ para fluidos em rotação rápida.
2. Interpretar o teorema: escoamentos lentamente variáveis em fluido rotante são bidimensionais.
3. Descrever as colunas de Taylor e sua visualização experimental.
4. Discutir extensões: fluidos estratificados, efeitos de Ekman.

Motivação

Um dos resultados mais surpreendentes da mecânica dos fluidos em rotação é o **teorema de Taylor-Proudman**: quando a rotação é suficientemente rápida ($Ro \ll 1$), o escoamento não pode variar na direção paralela ao eixo de rotação. Em outras palavras, um fluido em rotação rápida se comporta como se fosse *bidimensional* — a coluna inteira de fluido acima e abaixo de um ponto se move como um bloco rígido. A demonstração experimental deste resultado (as célebres *colunas de Taylor*) é uma das mais impressionantes da mecânica dos fluidos.

22.1 Demonstração do Teorema

Partimos da equação de Euler no referencial rotante, estacionária e com gravidade e centrífuga absorvidas na pressão modificada P' :

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P' - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}. \quad (22.1)$$

Tomamos o eixo z paralelo a $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}}$. No limite $Ro \ll 1$, desprezamos $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$:

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P' \quad (\text{balanço geostrófico em 3D}). \quad (22.2)$$

Tomamos o *rotacional* de ambos os lados, usando a identidade vetorial

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B},$$

com $\mathbf{A} = 2\boldsymbol{\Omega}$ (constante, logo $\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$ e $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} = 0$) e $\mathbf{B} = \mathbf{u}$:

$$\nabla \times (2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) = 2\boldsymbol{\Omega}(\nabla \cdot \mathbf{u}) - 2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla \times (\nabla P') = 0.$$

Para fluido incompressível ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), o primeiro termo se anula e resta:

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0 \implies \Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0. \quad (22.3)$$

Resultado 22.1 — Teorema de Taylor-Proudman

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \mathbf{0} \quad (22.4)$$

Para um fluido incompressível, invíscido, em rotação rápida ($Ro \ll 1$), e em regime estacionário, a velocidade **não depende** da coordenada z paralela ao eixo de rotação. O escoamento é bidimensional em planos perpendiculares a Ω .

Observação. Da incompressibilidade $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e do fato de u, v serem independentes de z :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \text{ depende só de } (x, y).$$

Logo, $\partial w / \partial z =$ função de (x, y) apenas. Se as condições de contorno no topo e fundo fixam w (por exemplo, $w = 0$ em superfícies rígidas), conclui-se que w é constante — tipicamente zero. O escoamento é estritamente horizontal e independente de z .

22.2 Colunas de Taylor

G. I. Taylor (1923) realizou o célebre experimento: um cilindro lento é arrastado ao longo do fundo de um tanque de fluido em rotação rápida. O resultado: toda a coluna de fluido acima do cilindro se move com ele como um bloco rígido — o fluido “percebe” o obstáculo mesmo a grande distância vertical. Essa estrutura rígida é a **coluna de Taylor**.

Interpretação: pelo teorema de Taylor-Proudman, a velocidade não pode variar com z . Se o fluido contorna o cilindro na base, toda a coluna acima deve fazer o mesmo. É como se o cilindro se estendesse ao longo de todo o eixo z .

Exemplo 22.1 (Colunas de Taylor em Júpiter). A Grande Mancha Vermelha de Júpiter é um vórtice gigante que persiste há séculos. Júpiter gira muito rapidamente ($\Omega_J \approx 1,8 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, período $\approx 10 \text{ h}$), então Ro para estruturas atmosféricas de grande escala é muito pequeno. O teorema de Taylor-Proudman sugere que os vórtices na atmosfera de Júpiter são estruturas quasi-bidimensionais que se estendem profundamente na direção do eixo de rotação — uma previsão consistente com dados da missão Juno (NASA). $\square$

22.3 A Camada de Ekman

O teorema de Taylor-Proudman vale para fluido invíscido. Na presença de viscosidade, o escoamento geostrófico no interior do fluido deve se ajustar às condições de contorno nas paredes (no-slip). Isso ocorre numa fina **camada de Ekman** de espessura:

$$\delta_E = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}} = \frac{L}{\sqrt{Re_\Omega}}, \quad (22.5)$$

onde $Re_\Omega = \Omega L^2 / \nu$. A razão $Ek = \nu / (\Omega L^2) = 1 / Re_\Omega$ é o **número de Ekman**, que mede a importância relativa da viscosidade frente à rotação.

Para a atmosfera: $\nu_{\text{eff}} \sim 10 \text{ m}^2/\text{s}$ (viscosidade turbulenta efetiva), $\Omega \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, logo $\delta_E \sim \sqrt{10/10^{-4}} \approx 300 \text{ m}$. Esta é a “camada limite atmosférica” onde o vento é afetado pelo atrito com a superfície terrestre.

Dentro da camada de Ekman, o vento gira progressivamente à medida que nos aproximamos do solo — é a **espiral de Ekman**. Na superfície, o vento tem uma componente *através* das isóbaras (de alta para baixa pressão), que causa convergência de massa em ciclones e divergência em anticiclones, sustentando os movimentos verticais na atmosfera.

22.4 Extensão: Fluidos Estratificados

Quando o fluido é estratificado (densidade variando com z), a rigidez de Taylor-Proudman compete com a estabilidade da estratificação. O resultado é uma modificação do teorema: a bidimensionalidade é preservada apenas para escalas maiores que o **raio de deformação interno (baroclínico) de Rossby**:

$$L_R^{\text{int}} = \frac{NH}{f}, \quad (22.6)$$

onde $N = \sqrt{-(g/\rho) \, d\rho/dz}$ é a frequência de Brunt-Väisälä e H a escala vertical da estratificação. Para a atmosfera: $N \sim 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, $H \sim 10 \text{ km}$, $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, logo $L_R^{\text{int}} \sim 1000 \text{ km}$ — a escala dos ciclones extratropicais.

Observação. A literatura usa o mesmo termo “raio de deformação de Rossby” para duas grandezas fisicamente distintas:

- $L_R^{\text{ext}} = \sqrt{gH}/|f|$ — **raio externo** (barotrópico), associado ao modo de superfície livre nas equações de águas rasas. Reaparece na Aula 23 nas ondas de Poincaré.
- $L_R^{\text{int}} = NH/|f|$ — **raio interno** (baroclínico), associado a modos de estratificação interna.

Para a atmosfera, $L_R^{\text{ext}} \sim 3000 \text{ km}$ e $L_R^{\text{int}} \sim 1000 \text{ km}$. Para o oceano, $L_R^{\text{ext}} \sim 2000 \text{ km}$ mas $L_R^{\text{int}} \sim 30 \text{ km}$ — diferença de quase duas ordens de grandeza. *Mantemos a distinção nas duas notações ao longo destas notas.*

Conexão com Física Teórica

O teorema de Taylor-Proudman é uma consequência da *rigidez topológica* da vorticidade em fluidos rotantes. Num fluido em rotação rápida, a vorticidade total é dominada pela “vorticidade planetária” $2\mathbf{\Omega}$, que é paralela a $\hat{\mathbf{z}}$. Pelo teorema de Kelvin, tubos de vorticidade se movem com o fluido. Como a vorticidade é essencialmente vertical e uniforme, os tubos se estendem de cima a baixo e se movem rigidamente. Em matéria condensada, um fenômeno análogo ocorre em superfluidos rotantes: os vórtices quantizados se alinham com o eixo de rotação formando uma rede de Abrikosov, análoga às colunas de Taylor.

Resumo

Para $Ro \ll 1$ (rotação rápida): $\partial \mathbf{u} / \partial z = 0$ (Taylor-Proudman) — o escoamento é 2D, independente da coordenada ao longo do eixo de rotação. Colunas de Taylor: o fluido contorna obstáculos como se estes se estendessem ao longo de todo o eixo. A camada de Ekman ($\delta_E = \sqrt{\nu/\Omega}$) ajusta o escoamento geostrófico às paredes; a espiral de Ekman explica o vento na camada limite atmosférica. Em fluidos estratificados, a rigidez é limitada ao raio de deformação interno $L_R^{\text{int}} = NH/f$.

Leitura Recomendada

- Kundu, Cohen & Dowling, §13.5–13.6.
- Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*, §8.9.
- Tong, §4.3 (discussão implícita via águas rasas e vorticidade potencial).

23 Ondas de Rossby e Aplicações Geofísicas

Aula 23 — 03/06/2026 (Quarta-feira)

Referência: Tong, §4.3.4; Kundu §13.7–13.8

Objetivos de Aprendizagem

1. Definir a vorticidade potencial Q nas equações de águas rasas e demonstrar sua conservação.
2. Compreender o mecanismo físico das ondas de Rossby: variação do parâmetro de Coriolis com latitude (β -efeito).
3. Derivar a relação de dispersão das ondas de Rossby e interpretar sua propagação para oeste.
4. Identificar ondas de Poincaré (inércia-gravidade) e contrastá-las com ondas de Rossby.
5. Discutir aplicações: correntes oceânicas, corrente de jato, previsão do tempo.

Motivação

O balanço geostrófico (Aula 21) descreve o estado “fundamental” da dinâmica oceânica e atmosférica de larga escala. Mas sistemas reais não estão em equilíbrio perfeito — perturbações propagam-se como ondas. A onda mais importante para a dinâmica de larga escala é a **onda de Rossby**, cuja existência se deve a um fato crucial: o parâmetro de Coriolis $f = 2\Omega \sin \theta_{\text{lat}}$ *varia com a latitude*. Esta variação, por menor que pareça, é responsável pela propagação de perturbações através do oceano e da atmosfera, pela ondulação da corrente de jato, e pela previsibilidade (limitada) do tempo meteorológico.

23.1 Vorticidade Potencial e sua Conservação

As equações de águas rasas (não lineares) admitem duas leis de conservação:

$$\text{Massa: } \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h \mathbf{u}) = 0, \quad h = H + \eta, \quad (23.1)$$

$$\text{Vorticidade: } \frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot (W \mathbf{u}) = 0, \quad W = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f, \quad (23.2)$$

onde $\nabla \cdot$ e $\mathbf{u} = (u, v)$ são bidimensionais. Combinando-as:

Resultado 23.1 — Conservação da vorticidade potencial

$$\boxed{\frac{DQ}{Dt} = 0, \quad Q = \frac{W}{h} = \frac{\zeta + f}{H + \eta}} \quad (23.3)$$

onde $\zeta = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ é a vorticidade relativa e f a vorticidade planetária. A **vorticidade potencial** Q é constante seguindo cada parcela de fluido. Essa é a generalização do teorema de Kelvin para fluidos em rotação com superfície livre.

Interpretação: se uma coluna de fluido se comprime (h diminui), a vorticidade total $\zeta + f$ deve diminuir proporcionalmente — como um patinador que estende os braços e desacelera. Se a parcela se move para norte (f aumenta), ζ deve diminuir para compensar.

Na versão linearizada sobre o estado de repouso ($h = H$, $\zeta = 0$), com $f = f_0 + \beta y$, a perturbação da vorticidade potencial é (a menos do fator H que reabsorvemos):

$$q' \equiv \zeta - \frac{f_0 \eta}{H}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (23.4)$$

Linearizando $DQ/Dt = 0$ em torno do estado de repouso e levando em conta que o estado de base $Q_{\text{base}} = (f_0 + \beta y)/H$ varia em y , obtemos:

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \beta v = 0. \quad (23.5)$$

No **plano- f** ($\beta = 0$), q' é literalmente independente do tempo em cada ponto: as configurações lineares de vorticidade potencial são todas estáticas. No **plano- β** , é a variação de f com a latitude — via o termo βv — que gera evolução temporal. Esse acoplamento é precisamente o que dá origem às *ondas de Rossby*, como veremos a seguir.

23.2 Ondas de Poincaré (Inércia-Gravidade)

Para $f = \text{constante}$ (plano- f), os modos normais $e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$ nas Eqs. (21.5)–(21.7) dão:

Resultado 23.2 — Ondas de Poincaré

$$\omega^2 = f^2 + c^2(k_x^2 + k_y^2), \quad c = \sqrt{gH} \quad (23.6)$$

Estas são ondas de gravidade modificadas pela rotação. Têm frequência mínima $\omega = |f|$ (para $k \rightarrow 0$): a rotação introduz um *gap* no espectro. O **raio externo de Rossby** (barotrópico) é

$$L_R^{\text{ext}} = \frac{c}{|f|} = \frac{\sqrt{gH}}{|f|},$$

a escala em que rotação e gravidade são igualmente importantes para o modo de superfície livre. É essa quantidade — e não o $L_R^{\text{int}} = NH/|f|$ da Aula 22 — que aparece nas equações de águas rasas com superfície livre.

Para $k \gg 1/L_R^{\text{ext}}$: $\omega \approx ck$ (ondas de gravidade usuais). Para $k \ll 1/L_R^{\text{ext}}$: $\omega \approx |f|$ (oscilações inerciais).

23.3 O Plano- β e as Ondas de Rossby

A variação de f com a latitude é capturada pela **aproximação de plano- β** :

$$f = f_0 + \beta y, \quad \beta = \frac{df}{dy} = \frac{2\Omega \cos \theta_{\text{lat}}}{R_T}, \quad (23.7)$$

onde R_T é o raio da Terra. Para latitudes médias: $\beta \approx 1,6 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

A conservação de vorticidade potencial com $f = f_0 + \beta y$ leva à **equação quasi-geostrófica**. Linearizando sobre $\eta = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} (c^2 \nabla^2 \eta - f_0^2 \eta) + c^2 \beta \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \quad (23.8)$$

Buscando modos normais $\eta = \eta_0 e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$:

Resultado 23.3 — Relação de dispersão das ondas de Rossby

$$\omega = -\frac{\beta c^2 k_x}{c^2 k^2 + f_0^2} = -\frac{\beta k_x}{k^2 + (L_R^{\text{ext}})^{-2}} \quad (23.9)$$

onde $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ e $L_R^{\text{ext}} = c/|f_0|$ é o raio externo de Rossby da equação de águas rasas. A mesma relação funcional vale para cada modo baroclínico, trocando-se c pela velocidade do modo c_n e L_R^{ext} por $L_R^{\text{int}} = c_n/|f_0|$.

Propriedades das ondas de Rossby:

1. **Propagação para oeste:** o sinal negativo em (23.9) (com $\beta > 0$) garante que a velocidade de fase na direção x é sempre *negativa* (para oeste). Este é um dos fatos mais notáveis da dinâmica geofísica.
2. **Muito lentas:** para escalas típicas ($L \sim 1000$ km), $\omega \sim \beta L \sim 10^{-11} \times 10^6 = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, correspondendo a períodos de *semanas a meses*. Ondas de Rossby são muito mais lentas que ondas de Poincaré.
3. **Dispersivas:** ω depende de k . Para $kL_R^{\text{ext}} \gg 1$: $\omega \approx -\beta/k_x$ (ondas curtas são mais lentas). Para $kL_R^{\text{ext}} \ll 1$: $\omega \approx -\beta c^2 k_x / f_0^2$ (regime “não dispersivo” em larga escala).
4. **Anisotrópicas:** a relação de dispersão depende de k_x mas não de k_y no numerador.

23.4 Mecanismo Físico das Ondas de Rossby

O mecanismo pode ser entendido inteiramente em termos de conservação de vorticidade potencial:

Considere uma parcela de fluido em equilíbrio com $\zeta = 0$ e $f = f_0$. Se ela é deslocada para *norte* (y aumenta, f aumenta), a conservação de $Q = (\zeta + f)/H$ exige que ζ *diminua* (torne-se negativa, ou seja, rotação horária no hemisfério norte). Essa circulação induz movimento para sul a oeste da parcela e para norte a leste. A perturbação se propaga para *oeste*.

Exemplo 23.1 (Ondas de Rossby baroclínicas no Atlântico). A relação de dispersão (23.9) aplica-se a cada modo vertical do oceano: o modo *barotrópico* (de superfície livre, com $c_{\text{ext}} = \sqrt{gH}$) e os modos *baroclínicos* (de pycnoclínio interno, com $c_n \sim$ poucos m/s). As ondas observadas em altimetria de satélite (TOPEX/Poseidon, Jason) são predominantemente do primeiro modo baroclínico — são essas que cruzam as bacias oceânicas em escalas de anos a décadas.

Modo baroclínico (modo interno, $n = 1$). Para o Atlântico em latitudes médias, parâmetros realistas:

$$c_1 \approx 2 \text{ m/s}, \quad f_0 \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}, \quad L_R^{\text{int}} = c_1/f_0 \approx 20 \text{ km}, \quad \beta \approx 2 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}.$$

Para ondas longas em larga escala ($k \ll 1/L_R^{\text{int}}$), o regime “não dispersivo” da Eq. (23.9) vale e a velocidade de fase em x é:

$$c_x = \frac{\omega}{k_x} \approx -\frac{\beta c_1^2}{f_0^2} = -\beta (L_R^{\text{int}})^2 \approx -2 \times 10^{-11} \times (2 \times 10^4)^2 \approx -8 \times 10^{-3} \text{ m/s},$$

isto é, $|c_x| \sim 1 \text{ cm/s}$ para oeste. Cruzar 6000 km do Atlântico leva então

$$T \sim \frac{6 \times 10^6 \text{ m}}{10^{-2} \text{ m/s}} \approx 6 \times 10^8 \text{ s} \approx 20 \text{ anos}.$$

Tempos desta ordem (de poucos anos a uma década) são exatamente os observados em altimetria de satélite para ondas baroclínicas longas em latitudes médias.

Modo barotrópico (modo externo). Para o modo externo, $c_{\text{ext}} = \sqrt{gH} \approx 200$ m/s e $L_R^{\text{ext}} \approx 2000$ km. A mesma fórmula dá $c_x \sim -\beta(L_R^{\text{ext}})^2 \approx -80$ m/s, e a travessia do Atlântico se daria em poucos dias — o modo barotrópico ajusta o oceano rapidamente, mas a maior parte da *variabilidade observável* reside no modo baroclínico, muito mais lento. $\square$

23.5 Aplicações Geofísicas

- **Corrente de jato** (*jet stream*): a corrente de jato na tropopausa (~ 10 km de altitude) é um escoamento geostrófico de oeste para leste. Suas ondulações (meandros) são ondas de Rossby de grande amplitude — quando a amplitude cresce demais, ocorre “quebra” (*Rossby wave breaking*), formando padrões de bloqueio atmosférico que causam eventos de calor ou frio extremos.
- **Circulação oceânica**: ondas de Rossby ajustam o oceano a perturbações em escalas de anos a décadas. A assimetria oeste-leste dos giros oceânicos (correntes do Golfo e de Kuroshio são estreitas e intensas no lado oeste) é uma consequência da propagação para oeste de Rossby.
- **El Niño**: ondas de Kelvin equatoriais (propagando para leste) e ondas de Rossby equatoriais (para oeste) desempenham papéis centrais no ciclo ENSO (*El Niño-Southern Oscillation*).
- **Previsão do tempo**: a dinâmica de ondas de Rossby na troposfera determina a evolução dos sistemas meteorológicos de larga escala em escalas de dias a semanas.

Conexão com Física Teórica

Em 2017, Delplace, Marston e Venaille mostraram que as ondas de Kelvin equatoriais e certas ondas de Rossby equatoriais são *topologicamente protegidas*: elas são análogas aos estados de borda em isolantes topológicos na matéria condensada. O “gap” espectral das ondas de Poincaré desempenha o papel do gap de banda; o equador, com f mudando de sinal, é a “fronteira” onde os estados de borda vivem. Estas ondas estão topologicamente protegidas contra perturbações, o que explica sua robustez. Este resultado conecta a mecânica dos fluidos geofísica à física topológica da matéria condensada — um dos desenvolvimentos mais surpreendentes da física teórica recente.

Resumo do Módulo V

A rotação introduz a força de Coriolis, governada pelo número de Rossby $Ro = U/(fL)$. Para $Ro \ll 1$: balanço geostrófico (vento ao longo de isóbaras) e teorema de Taylor-Proudman ($\partial \mathbf{u} / \partial z = 0$, escoamento 2D). A vorticidade potencial $Q = (\zeta + f)/h$ é conservada. A variação de f com a latitude (β -efeito) gera ondas de Rossby: $\omega = -\beta k_x / (k^2 + (L_R^{\text{ext}})^{-2})$, que se propagam para oeste e governam a dinâmica de larga escala do oceano e da atmosfera.

Leitura Recomendada

- Tong, §4.3.4 (Rossby waves).
- Kundu, Cohen & Dowling, §13.7–13.8.
- Acheson, §8.9 (Taylor columns).
- Delplace, P., Marston, J.B. & Venaille, A. — “Topological origin of equatorial waves”, *Science* **358**, 1075–1077 (2017).