

MECÂNICA DOS FLUIDOS

Notas de Aula — Suplemento: Ondas Sonoras

Tópico Complementar

Prof. Marcelo Santos Guimarães

*Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Graduação em Física · 1º Semestre 2026*

Material complementar, independente da numeração das Aulas 1–25. Retoma e fecha a única hipótese estrutural que atravessou todo o curso — a incompressibilidade — para revelar o fenômeno que ela exclui: o som.

Baseado nas notas de aula de David Tong (University of Cambridge)

<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/fluids.html>

Maio 2026

Sumário

1	Ondas Sonoras I: A Equação de Onda Acústica e a Velocidade do Som	3
1.1	Compressibilidade e a Equação de Estado	3
1.2	A Aproximação Adiabática	4
1.3	Linearização em Torno do Repouso	4
1.4	A Equação de Onda Acústica	4
1.5	A Velocidade do Som: Newton <i>versus</i> Laplace	5
1.6	Ondas Planas: Longitudinais e Não Dispersivas	6
1.7	Impedância, Energia e Intensidade Acústica	6
2	Ondas Sonoras II: Fontes, Efeito Doppler e Conexões com a Física Teórica	8
2.1	Ondas Esféricas e o Campo de uma Fonte Pulsante	8
2.2	O Efeito Doppler: Dedução por Contagem de Frentes	10
2.3	Regime Supersônico e o Cone de Mach	10
2.4	Não-Linearidade: Invariantes de Riemann e Formação de Choques	11
2.5	A Métrica Acústica e a Gravidade Análoga	12
2.6	Fônons: Quantização do Campo Acústico	13
2.7	Heliossismologia: O Sol como Cavidade Ressonante	14
2.8	O Limite Conforme: $c_s^2 = c^2/3$	15

1 Ondas Sonoras I: A Equação de Onda Acústica e a Velocidade do Som

Tópico complementar — Parte I
Referência: Tong, Cap. 4, §4.4

Objetivos de Aprendizagem

1. Reconhecer por que a compressibilidade exige uma equação adicional — a equação de estado — e qual é seu conteúdo termodinâmico.
2. Justificar a aproximação adiabática e deduzir a relação $P/\rho^\gamma = \text{const.}$
3. Linearizar as equações de Euler e da continuidade em torno de um fluido em repouso e derivar a equação de onda acústica.
4. Obter a velocidade do som $c_s = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_S}$ e compreender a correção adiabática de Laplace sobre a estimativa isotérmica de Newton.
5. Caracterizar as ondas sonoras como longitudinais e não dispersivas, e introduzir a impedância acústica, a energia e a intensidade.

Motivação

Na Aula 2 enunciamos a condição de incompressibilidade $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e observamos — quase de passagem — que ela é válida apenas quando $|\mathbf{u}| \ll c_s$, sendo a razão $\text{Ma} = |\mathbf{u}|/c_s$ o número de Mach. Dissemos então que “o fenômeno excluído por esta aproximação é o som”. O curso inteiro foi construído sobre essa hipótese: Bernoulli, vorticidade, escoamento potencial, camada limite, ondas de superfície, instabilidades, geofísica e turbulência foram todos tratados com ρ constante. Chegou o momento de abandonar essa hipótese e perguntar: *que física nova surge quando a densidade do fluido pode variar?* A resposta é o som.

A pergunta é mais profunda do que parece, porque nos força a reexaminar os fundamentos. Quando ρ era constante, as quatro equações (Euler + continuidade) bastavam para os quatro campos $(\mathbf{u}, P)$. Agora $\rho(\mathbf{x}, t)$ é também um campo dinâmico, e precisamos de uma quinta equação. Essa equação vem da **termodinâmica** — e é aqui que a temperatura entra, pela primeira vez, na mecânica dos fluidos.

1.1 Compressibilidade e a Equação de Estado

A equação de estado relaciona pressão, densidade e temperatura. O exemplo familiar é a lei dos gases ideais, $PV = Nk_B T$, que reescrevemos em termos da densidade $\rho = Nm/V$ (m é a massa de cada partícula):

$$P = \frac{\rho k_B T}{m}. \quad (1.1)$$

A novidade conceitual é que, fora do equilíbrio, tratamos P , ρ e T como *campos* locais $P(\mathbf{x}, t)$, $\rho(\mathbf{x}, t)$, $T(\mathbf{x}, t)$ ligados ponto a ponto por (1.1). A existência dessa relação é precisamente o que nos obriga a acompanhar a temperatura: se P e ρ variam, T também varia. Ao longo de todo o curso assumimos implicitamente que T simplesmente acompanhava P ; agora precisamos de uma regra explícita para sua evolução.

1.2 A Aproximação Adiabática

A regra correta seria uma equação de transporte para $T(\mathbf{x}, t)$. Tomamos um atalho físico: a **aproximação adiabática**. A ideia é que o tempo característico do movimento do fluido (uma oscilação acústica) é muito menor que o tempo de difusão de calor. As compressões e rarefações da onda sonora ocorrem rápido demais para que o calor se equalize entre regiões quentes (comprimadas) e frias (rarefeitas). Matematicamente: a **entropia é conservada**.

Recordando a primeira lei, $dE = \delta Q + \delta W$ com $\delta W = -P dV$ e, para processos reversíveis, $\delta Q = T dS$. Um processo adiabático tem $\delta Q = 0$, logo $dS = 0$. Definindo as capacidades térmicas a volume e pressão constantes, $C_V = T(\partial S/\partial T)_V$ e $C_P = T(\partial S/\partial T)_P$, e sua razão $\gamma = C_P/C_V$, a integração da primeira lei para um gás ideal fornece (ver Física Estatística) que S constante equivale a $PV^\gamma = \text{const}$:

Relação adiabática (lei de Poisson)

Sob compressão/expansão adiabática de um gás ideal,

$$\boxed{\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{const}}, \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V}. \quad (1.2)$$

Pela equipartição, $\gamma = 5/3$ para gases monoatômicos e $\gamma = 7/5 = 1,4$ para diatômicos. O ar é majoritariamente N_2 e O_2 (diatômicos), logo $\gamma_{\text{ar}} \approx 1,4$.

Observação. A distinção entre γ diatômico e monoatômico é, no fundo, quântica: os modos rotacional em torno do eixo e vibracional da molécula diatômica têm energias de excitação acima de $k_B T$ à temperatura ambiente e, por isso, “congelam”. A velocidade do som no ar carrega, portanto, uma assinatura silenciosa da mecânica quântica.

1.3 Linearização em Torno do Repouso

Seguimos exatamente o método de perturbações lineares das Aulas 16–20, agora permitindo que ρ varie. O estado base é o fluido em repouso, homogêneo:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \rho = \rho_0, \quad P = P_0 \quad (\text{constantes}). \quad (1.3)$$

Perturbamos com quantidades pequenas:

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}, \quad P = P_0 + \tilde{P}, \quad \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}, \quad (1.4)$$

mantendo apenas termos lineares em $\tilde{\rho}, \tilde{P}, \tilde{\mathbf{u}}$ (todos $\ll$ seus valores de base). A equação da continuidade $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$ linearizada perde o termo $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\rho}$ (segunda ordem):

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0. \quad (1.5)$$

A equação de Euler $\rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla P$ linearizada perde o termo convectivo $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ (segunda ordem) e $\nabla P_0 = 0$:

$$\rho_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = -\nabla \tilde{P}. \quad (1.6)$$

1.4 A Equação de Onda Acústica

Combinamos (1.5) e (1.6): tomamos ∂_t da continuidade e $\nabla \cdot$ da equação de Euler,

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} + \rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = 0, \quad \rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = -\nabla^2 \tilde{P}, \quad (1.7)$$

de modo que

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - \nabla^2 \tilde{P} = 0. \quad (1.8)$$

Falta fechar o sistema relacionando $\tilde{P}$ a $\tilde{\rho}$. É aqui que a adiabática (1.2) entra: como $P = P(\rho, S)$ com S fixo,

$$\tilde{P} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \tilde{\rho} \equiv c_s^2 \tilde{\rho}. \quad (1.9)$$

Substituindo em (1.8):

Resultado I.1 — Equação de onda acústica

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \tilde{\rho} = 0 \quad (1.10)$$

As perturbações de densidade (e, por (1.9), de pressão) propagam-se como ondas com velocidade c_s . A mesma equação vale para qualquer equação de estado barotrópica $P = P(\rho)$; só o valor de c_s muda.

1.5 A Velocidade do Som: Newton *versus* Laplace

A velocidade do som é a raiz da derivada da pressão em relação à densidade, *a entropia constante*:

$$c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S} \quad (1.11)$$

Para o gás ideal sob a adiabática (1.2), $P = P_0(\rho/\rho_0)^\gamma$, logo $(\partial P/\partial \rho)_S = \gamma P_0/\rho_0$:

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T_0}{m}}. \quad (1.12)$$

A velocidade do som depende apenas da temperatura (não da pressão ou densidade isoladas), e cresce com $\sqrt{T_0}$.

Resultado I.2 — A correção de Laplace

Newton, no *Principia*, supôs (erroneamente) que as compressões eram **isotérmicas**, obtendo $c_s^{\text{Newton}} = \sqrt{P_0/\rho_0}$. Laplace corrigiu: as compressões acústicas são **adiabáticas**, introduzindo o fator $\sqrt{\gamma}$:

$$c_s^{\text{Laplace}} = \sqrt{\gamma} c_s^{\text{Newton}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}. \quad (1.13)$$

Exemplo 1.1 (Velocidade do som no ar). Para o ar a $T_0 = 288$ K: $P_0 = 1,01 \times 10^5$ Pa, $\rho_0 = 1,23$ kg/m³, $\gamma = 1,4$.

Estimativa isotérmica de Newton: $c_s = \sqrt{P_0/\rho_0} = \sqrt{1,01 \times 10^5 / 1,23} \approx 287$ m/s.

Valor adiabático de Laplace: $c_s = \sqrt{1,4} \times 287 \approx 340$ m/s.

O valor medido é $c_s \approx 343$ m/s a 20 °C — o fator $\sqrt{\gamma}$ faz toda a diferença. (Newton, batendo palmas no pátio de Nevile, em Trinity College, mediu cerca de 300 m/s, e atribuiu a discrepância a fatores espúrios.) $\square$

Um fluido qualquer: o módulo de compressibilidade

Para líquidos a equação de estado não é a do gás ideal, mas (1.11) continua válida. Define-se o **módulo de compressibilidade** (*bulk modulus*) $K = \rho(\partial P/\partial \rho)_S$, de modo que $c_s = \sqrt{K/\rho_0}$. Para a água, $K \approx 2,2 \times 10^9$ Pa (muito maior que o de gases — é difícil comprimir água) e $\rho_0 \approx 10^3$ kg/m³, dando $c_s \approx 1,5 \times 10^3$ m/s — o som viaja $\sim 4,4$ vezes mais rápido na água que no ar.

1.6 Ondas Planas: Longitudinais e Não Dispersivas

A equação (1.10) é resolvida por modos de Fourier $\tilde{\rho} = \hat{\rho} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$, com a relação de dispersão

$$\omega = c_s |\mathbf{k}| \quad (1.14)$$

Esta é uma dispersão que *não dispersa*: todos os comprimentos de onda viajam à mesma velocidade c_s . Velocidade de fase e de grupo coincidem, $c = c_g = c_s$. Um pacote de ondas mantém sua forma — razão pela qual o som de uma orquestra distante chega com as notas na ordem certa. Contraste isto com as ondas de superfície dispersivas da Aula 16.

Reconstruindo a velocidade a partir de (1.6) com $\tilde{P} = c_s^2 \tilde{\rho}$, para uma onda plana propagando-se na direção $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\tilde{P}}{\rho_0 c_s} \hat{\mathbf{k}} = \frac{c_s}{\rho_0} \tilde{\rho} \hat{\mathbf{k}}. \quad (1.15)$$

A velocidade do fluido é *paralela* à direção de propagação: as ondas sonoras são **longitudinais** (compressões e rarefações ao longo de $\hat{\mathbf{k}}$), ao contrário das ondas eletromagnéticas, transversais. Além disso, $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{P}$ e $\tilde{\rho}$ oscilam todas *em fase*.

1.7 Impedância, Energia e Intensidade Acústica

A razão entre a perturbação de pressão e a velocidade do fluido numa onda progressiva é uma propriedade do meio:

Impedância acústica

$$Z = \frac{\tilde{P}}{\tilde{u}} = \rho_0 c_s. \quad (1.16)$$

Unidades: Pa · s/m = kg m⁻²s⁻¹ (o “rayl”). Para o ar, $Z \approx 1,2 \times 343 \approx 410$ rayl; para a água, $Z \approx 1,5 \times 10^6$ rayl. O contraste $\sim 3500\times$ explica por que tão pouca energia sonora cruza a interface ar-água (e por que precisamos colocar a cabeça sob a água para ouvir bem debaixo dela): a transmissão numa interface é governada pelo casamento de impedâncias, $\mathcal{T} = 4Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2)^2$, exatamente como em linhas de transmissão.

A densidade de energia acústica tem uma parte cinética e uma parte “potencial” de compressão:

$$e = \underbrace{\frac{1}{2} \rho_0 \tilde{u}^2}_{\text{cinética}} + \underbrace{\frac{\tilde{P}^2}{2 \rho_0 c_s^2}}_{\text{compressional}}. \quad (1.17)$$

Numa onda progressiva $\tilde{P} = \rho_0 c_s \tilde{u}$, as duas contribuições são iguais (equipartição, como nas ondas de gravidade). O fluxo de energia (vetor de intensidade acústica) é $\mathbf{I} = \tilde{P} \tilde{\mathbf{u}}$, e seu valor médio temporal:

Resultado I.3 — Intensidade acústica

$$\langle I \rangle = \frac{\langle \tilde{P}^2 \rangle}{\rho_0 c_s} = \frac{P_{\text{amp}}^2}{2\rho_0 c_s} = \langle e \rangle c_s. \quad (1.18)$$

A energia é transportada à velocidade do som (que aqui coincide com c_g). A intensidade é o quadrado da amplitude de pressão sobre a impedância $\rho_0 c_s$.

Exemplo 1.2 (Decibéis e a sensibilidade do ouvido). O nível de intensidade sonora é definido em escala logarítmica, $\beta = 10 \log_{10}(I/I_{\text{ref}})$ dB, com $I_{\text{ref}} = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ (limiar de audição a 1 kHz). Uma conversa normal (~ 60 dB) corresponde a $I = 10^{-6} \text{ W/m}^2$. Por (1.18), a amplitude de pressão é $P_{\text{amp}} = \sqrt{2\rho_0 c_s I} = \sqrt{2 \times 1,2 \times 343 \times 10^{-6}} \approx 0,029 \text{ Pa}$ — cerca de 3×10^{-7} da pressão atmosférica. No limiar de audição (10^{-12} W/m^2), o deslocamento das moléculas de ar é menor que o raio de um átomo: o ouvido humano opera quase no limite quântico do ruído térmico. $\square$

Conexão com Física Teórica

A relação de dispersão linear e não dispersiva $\omega = c_s k$ é idêntica à de um campo relativístico de massa nula, com c_s no papel da velocidade da luz c . Quantizando o campo de deslocamento do fluido, os quanta de som são os **fônons**, com energia $\hbar\omega = \hbar c_s k$ e momento $\hbar k$. A linearidade $\omega \propto k$ é a marca de um *bóson de Goldstone*: o estado fundamental do fluido quebra espontaneamente a simetria de translação (escolhe uma densidade ρ_0), e o fônon é o modo de Goldstone associado. Essa é a mesma estrutura matemática que governa mágnons em ferromagnetos, fônons em cristais e o modo de Anderson–Bogoliubov em supercondutores. Exploraremos as consequências mais profundas dessa analogia na Parte II.

Resumo

A compressibilidade exige uma quinta equação — a equação de estado — e, com ela, a termodinâmica entra na mecânica dos fluidos. A aproximação adiabática (S constante) dá $P/\rho^\gamma = \text{const.}$ Linearizando Euler e a continuidade em torno do repouso, obtém-se a equação de onda $\partial_t^2 \tilde{\rho} = c_s^2 \nabla^2 \tilde{\rho}$ com $c_s = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_S} = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}$ (gás ideal). A correção adiabática de Laplace ($\sqrt{\gamma}$) reconcilia teoria e medida ($c_s \approx 343 \text{ m/s}$ no ar). As ondas são longitudinais e não dispersivas; impedância $Z = \rho_0 c_s$; intensidade $\langle I \rangle = P_{\text{amp}}^2 / (2\rho_0 c_s)$.

Leitura Recomendada

- Tong, Cap. 4, §4.4 (*Sound Waves*).
- Landau & Lifshitz, *Fluid Mechanics*, §64–65.
- Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*, §3.6.

2 Ondas Sonoras II: Fontes, Efeito Doppler e Conexões com a Física Teórica

Tópico complementar — Parte II
Referência: Tong, Cap. 4, §4.4–4.5

Objetivos de Aprendizagem

1. Resolver a equação de onda para fontes esféricas, obter explicitamente o campo de uma esfera pulsante e deduzir a lei $\propto \omega^4$ da potência irradiada.
2. Deduzir, por contagem de frentes de onda, o efeito Doppler para fonte e observador em movimento, e contrastá-lo com o caso relativístico.
3. Construir o cone de Mach como envelope de frentes de onda e relacioná-lo ao caráter não linear dos choques.
4. Diagonalizar as equações 1D via invariantes de Riemann, deduzir a velocidade de propagação dependente da amplitude e calcular o tempo de formação do choque.
5. Derivar a métrica acústica de Unruh a partir do escoamento potencial barotrópico e identificar horizontes sônicos e a temperatura Hawking análoga.
6. Quantizar o campo acústico (fônons), obter a lei $C_V \propto T^3$ de Debye e o critério de velocidade crítica de Landau.
7. Quantizar os modos-p por WKB (heliossismologia) e reconhecer o limite conforme $c_s^2 = c^2/3$.

Motivação

A Parte I estabeleceu a equação de onda linear. As situações mais ricas são justamente aquelas em que a linearidade se rompe ou em que a geometria importa: uma fonte pontual que irradia, um avião que ultrapassa a barreira do som, o interior de uma estrela que “toca” como um sino. Cada uma abre, além disso, uma janela para ideias centrais da física teórica — da quantização de campos à gravidade análoga. Nesta parte tratamos cada tópico com as contas explícitas, não apenas com a fenomenologia.

2.1 Ondas Esféricas e o Campo de uma Fonte Pulsante

Para uma fonte localizada e esfericamente simétrica, modos planos não são o caminho natural. Usando $\nabla^2 \tilde{\rho} = r^{-1} \partial_r^2 (r \tilde{\rho})$ para campos radiais, a equação de onda (1.10) torna-se uma equação de onda 1D para $r \tilde{\rho}$:

$$\frac{\partial^2 (r \tilde{\rho})}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 (r \tilde{\rho})}{\partial r^2} = 0 \quad \implies \quad \tilde{\rho}(r, t) = \frac{1}{4\pi r} \left[F(t - r/c_s) + G(t + r/c_s) \right], \quad (2.1)$$

com F a onda *emergente* e G a *incidente*, que fazemos nula ($G = 0$) na ausência de ondas vindas do infinito.

O campo de velocidade: termos de campo próximo e de radiação

A velocidade reconstrói-se da equação de Euler linearizada (1.6) com $\tilde{P} = c_s^2 \tilde{\rho}$. Escrevendo a onda emergente como derivada de um potencial de fonte, $F(t - r/c_s) = \dot{Q}(t - r/c_s)$, temos $\tilde{P} = c_s^2 \dot{Q}/(4\pi r)$ e

$$\nabla \tilde{P} = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{c_s^2}{4\pi} \left[\frac{\dot{Q}}{r^2} + \frac{\ddot{Q}}{c_s r} \right] \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.2)$$

Integrando $\rho_0 \partial_t \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{P}$ no tempo (o que troca $\ddot{Q} \rightarrow \dot{Q}$, $\dot{Q} \rightarrow Q$):

$$\tilde{\mathbf{u}}(r, t) = \frac{c_s^2}{4\pi\rho_0} \left[\underbrace{\frac{Q(t - r/c_s)}{r^2}}_{\text{campo próximo}} + \underbrace{\frac{\dot{Q}(t - r/c_s)}{c_s r}}_{\text{radiação}} \right] \hat{\mathbf{r}} \quad (2.3)$$

Perto da fonte ($r \rightarrow 0$) domina o termo $\propto 1/r^2$ — um escoamento essencialmente incompressível, como o de uma fonte pontual da Aula 2. Longe ($r \rightarrow \infty$) domina o termo de radiação $\propto 1/r$, que carrega a energia ao infinito.

Esfera pulsante: a fonte monopolar

Considere uma esfera de raio $R(t) = a + \epsilon e^{i\omega t}$, com $\epsilon \ll a$, de modo que $\dot{R} = i\omega\epsilon e^{i\omega t}$. A condição de contorno é a igualdade entre a velocidade radial do fluido e a da superfície, $\tilde{\mathbf{u}}(a, t) \cdot \hat{\mathbf{r}} = \dot{R}$. Tomando $Q(t) = A e^{i\omega t}$ e substituindo em (2.3) em $r = a$:

$$\frac{c_s^2 A}{4\pi\rho_0} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{i\omega}{c_s a} \right) e^{-i\omega a/c_s} = i\omega\epsilon \implies A = \frac{4\pi\rho_0 i\omega\epsilon a^2 e^{i\omega a/c_s}}{c_s^2 (1 + i\omega a/c_s)}. \quad (2.4)$$

No limite de **fonte compacta** ($\omega a/c_s = ka \ll 1$, esfera muito menor que o comprimento de onda), $A \approx 4\pi\rho_0 i\omega\epsilon a^2/c_s^2$. A amplitude do campo de radiação (segundo termo de (2.3)) é então $|\tilde{u}_{\text{rad}}| = \omega^2 \epsilon a^2 / (c_s r)$.

Resultado II.1 — Potência irradiada por uma fonte monopolar

A intensidade média no campo distante é $\langle I \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 c_s |\tilde{u}_{\text{rad}}|^2$. Integrando sobre uma esfera de raio r , a potência acústica total é independente de r (conservação de energia) e vale

$$\mathcal{P} = 4\pi r^2 \langle I \rangle = 2\pi\rho_0 \frac{\omega^4 \epsilon^2 a^4}{c_s} \quad (2.5)$$

A dependência $\mathcal{P} \propto \omega^4$ é o análogo acústico da lei de Rayleigh: fontes compactas irradiam mal as baixas frequências. É a razão física de alto-falantes pequenos serem ineficientes nos graves.

Resultado II.2 — Decaimento $1/r$ e lei do inverso do quadrado

A amplitude de radiação decai como $1/r$, logo $\langle I \rangle \propto 1/r^2$: a potência $\langle I \rangle \cdot 4\pi r^2$ é conservada. É a mesma lei geométrica da radiação eletromagnética e da gravitação — uma consequência do fluxo em três dimensões.

2.2 O Efeito Doppler: Dedução por Contagem de Frentes

Seja f_0 a frequência emitida e c_s a velocidade do som *no referencial do meio* (ar parado). Trataremos os dois casos separadamente e depois os combinamos.

Observador em movimento (fonte em repouso)

A fonte em repouso emite frentes esféricas separadas por $\lambda = c_s/f_0$. Um observador que se move *em direção* à fonte com velocidade v_{obs} encontra as frentes a uma taxa maior: a velocidade das frentes relativa a ele é $c_s + v_{\text{obs}}$, e como o espaçamento λ é inalterado,

$$f_{\text{obs}} = \frac{c_s + v_{\text{obs}}}{\lambda} = f_0 \frac{c_s + v_{\text{obs}}}{c_s}. \quad (2.6)$$

Fonte em movimento (observador em repouso)

Agora a fonte se move *em direção* ao observador com velocidade v_{fonte} . Durante um período $T_0 = 1/f_0$, a fonte avança $v_{\text{fonte}}T_0$, encurtando o comprimento de onda emitido na direção do movimento para

$$\lambda' = (c_s - v_{\text{fonte}})T_0 = \frac{c_s - v_{\text{fonte}}}{f_0} \implies f_{\text{obs}} = \frac{c_s}{\lambda'} = f_0 \frac{c_s}{c_s - v_{\text{fonte}}}. \quad (2.7)$$

Combinação

Resultado II.3 — Efeito Doppler acústico

$$f_{\text{obs}} = f_0 \frac{c_s \pm v_{\text{obs}}}{c_s \mp v_{\text{fonte}}} \quad (2.8)$$

Sinais superiores: aproximação (frequência sobe); inferiores: afastamento. A assimetria entre v_{obs} e v_{fonte} é *física*, não um artefato: o meio define um referencial privilegiado. Expandindo para velocidades pequenas, $f_{\text{obs}} \approx f_0[1 + (v_{\text{obs}} + v_{\text{fonte}})/c_s]$ — só a velocidade relativa importa em primeira ordem, e a assimetria aparece em $O(v^2/c_s^2)$.

Observação. Para a *luz* não há meio, e a relatividade restrita força a simetria:

$$f_{\text{obs}} = f_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (\beta = v/c, \text{afastamento}),$$

função apenas da velocidade relativa v . A assimetria entre fonte e observador no caso do som é, portanto, uma assinatura direta da existência de um meio material — precisamente o que Michelson e Morley não encontraram para a luz.

Exemplo 2.1 (A sirene da ambulância). $f_0 = 700$ Hz, $v_{\text{fonte}} = 30$ m/s, observador parado, $c_s = 343$ m/s. Aproximando-se: $f_{\text{obs}} = 700 \cdot 343/313 \approx 767$ Hz. Afastando-se: $700 \cdot 343/373 \approx 644$ Hz. O salto de ~ 123 Hz na passagem — quase três semitons — é a queda de tom familiar. A mesma física, na luz, é a base do desvio para o vermelho cosmológico e da velocimetria de estrelas. $\square$

2.3 Regime Supersônico e o Cone de Mach

Quando a fonte se move mais rápido que o som ($v > c_s$, $\text{Ma} = v/c_s > 1$), ela ultrapassa as frentes que emite. Construímos o cone de Mach como **envelope** dessas frentes.

Construção do envelope

Considere a fonte na posição atual O . A frente emitida há um tempo τ é uma esfera de raio $c_s\tau$, centrada no ponto O' que a fonte ocupava então, a uma distância $v\tau$ atrás de O . A reta que parte de O e tangencia essa esfera faz, com a trajetória, um ângulo μ tal que o cateto oposto é o raio $c_s\tau$ e a hipotenusa é $v\tau$:

$$\sin \mu = \frac{c_s\tau}{v\tau} = \frac{c_s}{v} = \frac{1}{\text{Ma}} \quad (2.9)$$

Como o resultado independe de τ , *todas* as frentes tangenciam o mesmo cone — elas o envelopam. A superfície do cone é uma descontinuidade de pressão, densidade e temperatura: uma **onda de choque**, cuja chegada ao solo é o estrondo sônico.

Exemplo 2.2 (Caça a Mach 2). $\text{Ma} = 2 \Rightarrow \sin \mu = 1/2 \Rightarrow \mu = 30^\circ$. O observador no solo só ouve a aeronave *depois* que o cone o alcança: a aeronave chega antes do próprio som. $\square$

2.4 Não-Linearidade: Invariantes de Riemann e Formação de Choques

O choque é, na origem, um fenômeno *não linear* — na Parte I descartamos o termo $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}$. Restaurando-o em 1D, com equação de estado barotrópica $P = P(\rho)$ e $c_s^2(\rho) = dP/d\rho$, as equações são

$$(\text{continuidade}) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.10)$$

$$(\text{Euler}) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_s^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (2.11)$$

onde usamos $\rho^{-1} \partial_x P = (c_s^2/\rho) \partial_x \rho$. A chave é introduzir a variável

$$Q(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c_s(\rho')}{\rho'} d\rho', \quad \text{de modo que} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{c_s}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{c_s}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (2.12)$$

Multiplicando a continuidade por c_s/ρ obtemos $\partial_t Q + u \partial_x Q + c_s \partial_x u = 0$; a equação de Euler vira $\partial_t u + u \partial_x u + c_s \partial_x Q = 0$. Somando e subtraindo:

Resultado II.4 — Invariantes de Riemann

As combinações $R_{\pm} = u \pm Q$ satisfazem

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c_s) \frac{\partial}{\partial x} \right] R_{\pm} = 0 \quad (2.13)$$

Ou seja, $R_{\pm}$ é **constante** ao longo das curvas características $C_{\pm}$ definidas por $dx/dt = u \pm c_s$. As equações foram diagonalizadas: cada invariante propaga-se à velocidade local $u \pm c_s$.

Gás ideal: avaliando Q explicitamente

Para $P = K\rho^{\gamma}$ temos $c_s^2 = \gamma K\rho^{\gamma-1} = c_s^2(\rho_0)(\rho/\rho_0)^{\gamma-1}$, logo $c_s \propto \rho^{(\gamma-1)/2}$ e

$$Q(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c_s(\rho')}{\rho'} d\rho' = \frac{2}{\gamma-1} [c_s(\rho) - c_s(\rho_0)] \implies R_{\pm} = u \pm \frac{2c_s}{\gamma-1}. \quad (2.14)$$

Ondas simples e o empinamento

Suponha que numa região $R_- = u - \frac{2c_s}{\gamma-1}$ seja constante (por exemplo, conectada a uma zona em repouso). Então c_s fica determinado por u , e ao longo de cada característica C_+ tanto u quanto c_s são constantes — são as **ondas simples**. A velocidade de propagação de um ponto de dado u é

$$\frac{dx}{dt} = u + c_s = c_0 + \frac{\gamma+1}{2} u, \quad (2.15)$$

onde $c_0 = c_s(\rho_0)$ e usamos $c_s = c_0 + \frac{\gamma-1}{2} u$. As cristas (maior u) viajam mais rápido que os vales: a onda *empina*.

Resultado II.5 — Tempo de formação do choque

Para um perfil inicial de onda simples $u(x, 0) = u_0(\xi)$ (com ξ o rótulo de cada característica), as características $x = \xi + [c_0 + \frac{\gamma+1}{2} u_0(\xi)] t$ cruzam-se quando $\partial x / \partial \xi = 0$, isto é, no instante

$$t_\star = \frac{-2}{(\gamma+1) \min_\xi u'_0(\xi)} \quad (2.16)$$

(avaliado no ponto de gradiente negativo mais íngreme). Em $t_\star$ a inclinação $\partial u / \partial x$ diverge e forma-se o choque. É o mesmo mecanismo da equação de Burgers e dos engarrafamentos de trânsito.

As características desenham, no espaço-tempo $(x, c_0 t)$, “cones de som” a $\pm 45^\circ$ — o análogo hidrodinâmico exato dos cones de luz. Essa observação não é acidental: ela é a versão linearizada da estrutura causal que tornamos exata a seguir.

2.5 A Métrica Acústica e a Gravidade Análoga

Mostramos agora que o som num escoamento de fundo obedece *exatamente* à equação de um campo escalar sem massa em um espaço-tempo curvo — o resultado de Unruh (1981) que funda a gravidade análoga.

Equações do escoamento potencial barotrópico

Suponha o escoamento irrotacional, $\mathbf{u} = \nabla \phi$, e barotrópico, $P = P(\rho)$. Definindo a entalpia específica $h(\rho)$ por $dh = dP/\rho$, a equação de Euler integra-se na equação de Bernoulli dependente do tempo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + h(\rho) = 0, \quad \text{com} \quad \frac{dh}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} = \frac{c_s^2}{\rho}. \quad (2.17)$$

A isto juntamos a continuidade $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \nabla \phi) = 0$.

Linearização em torno de um fundo arbitrário

Perturbamos em torno de um escoamento de fundo (ρ_0, ϕ_0) com velocidade $\mathbf{v}_0 = \nabla \phi_0$ (que pode variar no espaço): $\phi = \phi_0 + \phi_1$, $\rho = \rho_0 + \rho_1$. A Bernoulli linearizada dá uma relação algébrica para ρ_1 :

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 + \frac{c_s^2}{\rho_0} \rho_1 = 0 \implies \rho_1 = -\frac{\rho_0}{c_s^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \right) \phi_1. \quad (2.18)$$

Substituindo ρ_1 na continuidade linearizada $\partial_t \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_0 + \rho_0 \nabla \phi_1) = 0$, obtém-se uma única equação de segunda ordem para ϕ_1 . Após arranjar os termos, ela tem precisamente a forma

covariante

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_1) = 0 \quad (x^0 = t, x^i), \quad (2.19)$$

com

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} = \frac{\rho_0}{c_s^2} \begin{pmatrix} -1 & -v_0^j \\ -v_0^i & c_s^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Resultado II.6 — A métrica acústica de Unruh

Invertendo, as flutuações sonoras propagam-se como um campo sem massa $\square_g \phi_1 = 0$ na geometria efetiva (em 3+1 dimensões)

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s} \left[- (c_s^2 - v_0^2) dt^2 - 2 \mathbf{v}_0 \cdot d\mathbf{x} dt + d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \right] \quad (2.21)$$

O escoamento de fundo $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ entra como um termo de arraste g_{ti} , exatamente como o desvio (*shift*) na métrica de um buraco negro em rotação.

Horizonte sônico e temperatura Hawking análoga

O coeficiente de dt^2 é $g_{tt} \propto -(c_s^2 - v_0^2)$. Ele troca de sinal onde a componente normal do escoamento iguala a velocidade do som, $|v_{0\perp}| = c_s$: ali se forma um **horizonte sônico**. Som emitido a jusante de uma região onde $v_0 > c_s$ não consegue “nadar contra a corrente” para escapar — é a versão acústica do horizonte de eventos. A gravidade superficial do horizonte é o gradiente de $(c_s^2 - v_{0\perp}^2)$ ali, levando à temperatura Hawking análoga

$$k_B T_H = \frac{\hbar}{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial n} (v_{0\perp} - c_s) \right|_{\text{horizonte}}. \quad (2.22)$$

A predição foi testada em condensados de Bose–Einstein (Steinhauer, 2016 e seguintes), onde se observou o espectro térmico de fônons emitidos por um horizonte acústico — a gravidade análoga é hoje um laboratório real para a física de horizontes.

Conexão com Física Teórica

A Eq. (2.21) é exata na aproximação linear: nenhum limite de campo fraco é necessário. O que *não* emerge é a dinâmica de Einstein — a métrica acústica é fixada pelo escoamento de fundo, não por equações de campo gravitacionais. Por isso a gravidade análoga reproduz fielmente a *cinemática* de campos em espaços curvos (radiação Hawking, criação de partículas cosmológica, superradiância) mas não sua *dinâmica*. Os “cones de som” do empinamento não linear (Eq. (2.13)) são a versão mais simples dessa mesma estrutura causal efetiva.

2.6 Fônons: Quantização do Campo Acústico

A linearidade da equação de onda permite expandir o campo de deslocamento (ou o potencial ϕ_1) em modos normais e quantizá-lo como uma coleção de osciladores harmônicos — um por modo ($\mathbf{k}$, polarização):

$$\hat{\phi}_1(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho_0 V \omega_k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t)} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t)} \right), \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (2.23)$$

com $\omega_k = c_s |\mathbf{k}|$. O hamiltoniano torna-se $\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_k (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2})$: os quanta são os **fônons**, de energia $\hbar \omega_k = \hbar c_s |\mathbf{k}|$ e momento $\hbar \mathbf{k}$. A dispersão linear $\omega \propto k$, com c_s no papel da velocidade da luz, identifica o fônon como um *bóson de Goldstone* da simetria de translação espontaneamente quebrada pelo estado fundamental.

A lei $C_V \propto T^3$ de Debye

A dispersão linear fixa a densidade de modos. Em 3D, o número de modos com $|\mathbf{k}| < k$ é $V k^3 / 6\pi^2$ (por polarização), de modo que a densidade de estados em frequência é

$$g(\omega) d\omega \propto \omega^2 d\omega. \quad (2.24)$$

A energia térmica é $E = \int_0^{\omega_D} \hbar \omega g(\omega) \frac{d\omega}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1}$. A baixas temperaturas o limite superior pode ir a ∞ ; reescalando $x = \hbar \omega / k_B T$,

$$E \propto T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} T^4 \implies \boxed{C_V = \frac{\partial E}{\partial T} \propto T^3} \quad (2.25)$$

Esta é a célebre lei T^3 de Debye para o calor específico de sólidos — consequência direta da dispersão acústica linear, exatamente como a lei de Stefan–Boltzmann $\propto T^4$ decorre da dispersão linear dos fótons.

O critério de velocidade crítica de Landau

Num superfluido, uma excitação de energia $\varepsilon(p)$ e momento p só pode ser criada por um obstáculo que se move com velocidade v se a conservação de energia e momento permitir, o que exige $v \geq \varepsilon(p)/p$. A velocidade crítica abaixo da qual o escoamento é *sem dissipação* é

$$v_c = \min_p \frac{\varepsilon(p)}{p}. \quad (2.26)$$

Para o ramo fonônico $\varepsilon = c_s p$, isto dá $v_c = c_s$: abaixo da velocidade do som, nenhum fônon pode ser emitido. É o análogo microscópico exato do limiar de Cherenkov e da velocidade mínima das ondas capilares (Aula 18).

Conexão com Física Teórica

A mesma estrutura — modo de Goldstone com dispersão linear — governa fônons em cristais, mágnons em (anti)ferromagnetos e o modo de Anderson–Bogoliubov em supercondutores. Em superfluidos, além do “primeiro som” (oscilação de densidade) existe o **segundo som**: uma onda de *temperatura/entropia* em que as componentes normal e superfluida oscilam em contrafase. É um modo acústico de natureza inteiramente nova, sem análogo num fluido clássico simples.

2.7 Heliossismologia: O Sol como Cavidade Ressonante

Uma cavidade 1D de comprimento L suporta ondas estacionárias com frequências discretas $\omega_n = n\pi c_s / L$ — o princípio do tubo de órgão. O Sol é uma cavidade gigante para ondas sonoras (**modos-p**, em que a pressão é a força restauradora), aprisionadas entre a superfície e camadas profundas onde são refratadas de volta pelo crescimento de $c_s \propto \sqrt{T}$ com a profundidade.

Quantização WKB e separação assintótica

Para um perfil $c_s(r)$ que varia lentamente, a condição de onda estacionária é a quantização WKB entre os dois pontos de retorno r_1, r_2 :

$$\int_{r_1}^{r_2} k_r(r) dr = (n + \alpha) \pi, \quad k_r^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c_s^2} - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2}, \quad (2.27)$$

onde o termo $\ell(\ell + 1)/r^2$ vem da estrutura angular (harmônicos esféricos de grau ℓ) e $\omega_c = c_s/2H_\rho$ é a **frequência de corte acústica** (H_ρ = escala de altura da densidade): ondas com $\omega < \omega_c$ não se propagam, são evanescentes. Para os modos radiais de alta ordem ($\omega \gg \omega_c$, ℓ pequeno), $k_r \approx \omega/c_s$ e (2.27) dá frequências igualmente espaçadas, $\nu_n \approx (n + \alpha) \Delta\nu$, com a **grande separação**

$$\Delta\nu = \left(2 \int_0^R \frac{dr}{c_s(r)} \right)^{-1} \quad (2.28)$$

— o inverso do dobro do tempo de travessia acústica da estrela.

Conexão com Física Teórica

A heliosismologia inverte (2.27): medindo milhares de frequências ν_{nl} com precisão de partes em 10^5 (SOHO, GONG), reconstrói-se o perfil interno $c_s(r)$ — e dele a temperatura, composição e rotação do Sol. É uma tomografia acústica, irmã da sismologia terrestre, hoje estendida a milhares de estrelas pela asterossismologia (Kepler, TESS, PLATO). A própria estrutura — modos de uma cavidade rotulados por (n, ℓ, m) — é idêntica à dos níveis de um átomo ou de um poço de potencial quântico.

2.8 O Limite Conforme: $c_s^2 = c^2/3$

Há um valor de c_s central em física de altas energias. Para um fluido relativístico, $T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P) u^\mu u^\nu / c^2 + P g^{\mu\nu}$, com $u^\mu u_\mu = -c^2$. Seu traço é

$$T^\mu{}_\mu = -(\varepsilon + P) + 4P = 3P - \varepsilon. \quad (2.29)$$

Um fluido **conforme** (sem escala de massa intrínseca) tem traço nulo, $T^\mu{}_\mu = 0$, o que impõe $\varepsilon = 3P$, isto é $P = \varepsilon/3$. A velocidade do som relativística é então

$$c_s^2 = c^2 \frac{dP}{d\varepsilon} = \frac{c^2}{3} \implies c_s = \frac{c}{\sqrt{3}} \approx 0,577 c \quad (2.30)$$

É a velocidade do som no plasma de quarks e glúons ultrarrelativístico (RHIC, LHC) e no fluido primordial. O valor $c_s^2 = 1/3$ (em unidades de c) foi conjecturado como *limite superior* para muitos sistemas, mas dados recentes sobre o interior de estrelas de nêutrons sugerem que a matéria nuclear densa pode *ultrapassá-lo* ($c_s^2 > c^2/3$) sem violar a causalidade ($c_s < c$).

Observação. A causalidade relativística exige apenas $c_s < c$. A condição $c_s \leq c/\sqrt{3}$ não é fundamental: é propriedade de teorias conformes e de muitos modelos fracamente acoplados. Sua possível violação em estrelas de nêutrons — inferível hoje de massas, raios e da forma de ondas gravitacionais de fusões (LIGO/Virgo) — é um indicador valioso de física nuclear não trivial, na fronteira entre QCD, astrofísica e ondas gravitacionais.

Resumo

Fontes esféricas: amplitude $\propto 1/r$, com campo próximo ($1/r^2$) e de radiação ($1/r$); a esfera pulsante compacta irradia $\mathcal{P} \propto \omega^4$. O efeito Doppler (2.8), deduzido por contagem de frentes, é assimétrico entre fonte e observador porque o meio fixa um referencial — ao contrário da luz. O cone de Mach ($\sin \mu = 1/\text{Ma}$) é o envelope das frentes; o choque é a quebra não linear das características de Riemann $R_{\pm} = u \pm 2c_s/(\gamma - 1)$, com tempo de formação $t_{\star}$ (2.16). A métrica acústica de Unruh (2.21) emerge *exatamente* da linearização do escoamento potencial barotrópico, com horizontes sônicos e radiação Hawking análoga. A quantização dá fônons (Goldstone, $C_V \propto T^3$ de Debye, $v_c = c_s$ de Landau). A heliosismologia quantiza modos-p numa cavidade ($\Delta\nu = \text{inverso do tempo de travessia}$). O limite conforme $c_s = c/\sqrt{3}$ ancora a discussão em QCD e estrelas de nêutrons.

Leitura Recomendada

- Tong, Cap. 4, §4.5 (*Non-Linear Sound Waves, Soundcones*).
- Landau & Lifshitz, *Fluid Mechanics*, §64–65, §82–84 (choques).
- W. G. Unruh, *Experimental Black-Hole Evaporation?*, Phys. Rev. Lett. **46**, 1351 (1981).
- Barceló, Liberati & Visser, *Analogue Gravity*, Living Rev. Relativity **8**, 12 (2005).
- Christensen-Dalsgaard, *Helioseismology*, Rev. Mod. Phys. **74**, 1073 (2002).